ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Студент должен изучить материал по теме и **УМЕТЬ** ответить на следующие вопросы:

1. Случайное событие. Противоположные события.
2. Вероятность случайного события. Классическое и статистическое определение вероятности.
3. Понятие о совместных и несовместных событиях. Примеры совместных и несовместных событий.
4. Законы (теоремы) сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.
5. Понятие о зависимых и независимых событиях. Условная вероятность.
6. Законы (теоремы) умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.

Краткая теория

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Теория вероятности изучает случайные события и случайные величины.

Случайное событие – это результат испытания.

Испытание (опыт, эксперимент) - комплекс условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз. Испытание может проводиться человеком, но может осуществляться и независимо от человека. Человек в этом случае выступает в роли наблюдателя.

Событие обозначаются начальными прописными (заглавными) буквами латинского алфавита ***A, B, C.***

Достоверное событие - это событие, которое в результате испытания обязательно должно произойти.

Невозможное событие – это событие, которое в результате испытания вообще не может произойти.

События называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает появление другого. В противном случае события – *совместные*.

Противоположные события: два события A и $\overline{A}$ называются противоположными, если непоявление одного из них в результате данного испытания влечет появление другого. ($\overline{A}$ читается “не A”).

Вероятность случайного события

Численная мера степени объективности возможности наступления события называется ***вероятностью случайного события.***

Классическое определение вероятности события A: $P(\mathrm{A}) = \frac{m}{n}$.

Вероятность события A равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию A *(m)* к общему числу случаев *(n).*

Задача 1.1. Лабораторная крыса, помещенная в лабиринт, должна избрать один из пяти возможных путей. Лишь один из них ведет к поощрению в виде пище. В предположении, что крыса с одинаковой вероятностью изберет любой путь, какова вероятность выбранного пути, ведущего к пище?

Решение. $\frac{1}{5}$.

Задача 1.2. При бросании игральной кости, возможно, шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Какова вероятность появления четного числа очков?

Решение. $P(\mathrm{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Событие A – “появление четного числа очков” благоприятствуют 3 исхода 2, 4 и 6 очков.

Задача 1.3. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что число не взятой карточки кратно 5. В данном испытании имеется 30равновозможнах исходов, из которых событию A благоприятствуют 6 исходов (5, 10, 15, 20, 25, 30) следовательно, $P(\mathrm{A}) = \frac{6}{30} = 0{,}2$.

Задача 1.4. Подбрасываются 2 монеты. Какова вероятность, что обе упадут “гербом” кверху?

Решение. 4 исхода бросания 2-х монет:ГГ, ГР, РГ, РР.
Пусть событие A – “выпали 2 герба”- этому событию благоприятствует один исход.
$P(\mathrm{A}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Задача 1.5. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 7 или 8?

Решение. Обозначим события: A – “выпало 7 очков”, В -“выпало 8 очков”.

Событию A благоприятствует 6 элементарных исходов: (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1) .

Событие В благоприятствует 5 исходов: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2).

Всех равновозможных исходов $n = 6^2 = 36$.

$P(\text{A}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}167$, $\quad P(\text{B}) = \frac{5}{36} = 0{,}139$.

Итак, *P(A) > P(B)* получить в сумме 7 очков более вероятнее событие, чем получить в сумме 8 очков.

Статистическое определение вероятности

Относительная частота события - это доля тех ***фактически проведенных*** испытаний, в которых событие *A* появилось $W = P^*(\text{A}) = \frac{m}{n}$.

Это опытная экспериментальная характеристика, где m-число опытов, в которых появилось событие *A; n*- число всех проведенных опытов.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний

$$P(\text{A}) = \lim_{n-\infty} \frac{m}{n}.$$

Задача 1.6. Из 982 больных, поступивших в хирургическую больницу за месяц, 275 человек имели травмы. Какова относительная частота поступления больных с этим видом заболевания?

Р е ш е н и е . $P^*(\text{A}) = \frac{275}{982}$.

Задача 1.7. При стрельбе по мишени частота попадания $\text{w} = 0{,}75$. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

Р е ш е н и е . $W = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad m = wn$; $m = 0{,}75 \cdot 40 = 30$.

Ответ: было получено 30 попаданий.

Закон сложения вероятностей

Сумма двух событий это такое событие, при котором появляется хотя бы одно из этих событий (*A* или *B*).

Если *A* и *B* ***совместные*** **с**обытия, то их сумма *A+B* обозначает наступление события *A* или события *B* или обоих событий вместе.

Если *A* и *B* ***несовместные*** события, то сумма *A+B* означает наступление или события *A* или события *B*.

Задача 1.8. Победитель соревнования награждается призом (событие *A*), денежной премией (событие *B*), медалью (событие *C*). Что представляют собой события *A+B*?

Р е ш е н и е Событие *A+B* состоят в награждении победителя или призом или денежной премией, или тем и другим.

Задача 1.9. Турист имеет возможность посетить 3 города: *A, B* и *C*. Обозначаем события: *A* - турист посетил город *A*;

B - турист посетил город *B*;

C - турист посетил город *C*.

В чем заключается событие *A+C*?

Р е ш е н и е Турист посетил только один из городов *А* или С, или он посетил их оба.

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P\ (A{+}B) = P(A){+}(B)$.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P\ (A{+}B) = P(A){+}(B){-}P(AB).$$

Сумма вероятностей дискретных событий, образующих полную группу, равна единице $P(A_1) + P(A_2){+}\ldots{+}P(A_n) = 1$ или

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(\mathrm{A}) + P(\overline{\mathrm{A}}) = 1$$

Задача1.10. Пусть вероятность того, что забег выигрывает Джим, равна1/3, а вероятность того, что забег выигрывает, Том равна 1/5. Какова вероятность того, что забег выиграет один из них?

Р е ш е н и е $P(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$..

Задача 1.11. В денежно - вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша безразлично, денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета.

Р е ш е н и е $P(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \frac{150}{10000} + \frac{50}{10000} = 0{,}02$.

Задача 1.12. Вероятность попадания в опухолевую клетку «мишень» первого радионуклиида ровна P_1= 0,7,а второго – P_2= 0,8. Найти вероятность попадания в клетку – мишень, если бы одновременно использовались оба препарата.

Р е ш е н и е :

$$P\ (A{+}B) = P(A){+}P(B){-}P(A{\cdot}B) = 0{,}7{+}0{,}8{-}0{,}56 = 0{,}94.$$

Для непрерывных случайных величин условие нормировки имеет вид

.

Задача 1.13. В большой популяции плодовой мушки 25% мух имеет мутацию глаз, 50% - мутацию крыльев, а 40% мух с мутацией глаз имеют и мутацию крыльев. Какова вероятность того, что у мухи, наудачу выбранной из этой популяции, окажется хотя бы одна из этих мутаций?

Р е ш е н и е :

А – событие, состоящие в том, что случайно выбранная муха имеет мутации глаз. В есть событие, состоящее в том, что случайно выбранная муха имеет мутацию крыльев. Вероятность того, что муха имеет одну или обе мутации:

$P(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{AB}).$

Но $P(\mathrm{A}) = 0{,}25\ P(\mathrm{B}) = 0{,}5.$

Тогда $P(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 0{,}25 + 0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}65.$

Условная вероятность

Условная вероятность события B - это вероятность события B, найденная при условии, что событие A произошло. Обозначается $P(B/A)$.

Задача 1.14. В коробке содержится 3 белых и 3 желтых таблетки. Из коробки дважды вынимают наугад по одной таблетке, не возвращая их в коробку. Найти вероятность появления белых таблеток при втором испытании (событие B), если при первом испытании было извлечена желтая таблетка (событие A).

Р е ш е н и е . После первого испытания в коробке осталось 5 таблеток, из них 3 белых.

Искомое условие вероятности: $P(\mathrm{B/A}) = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Задача 1.15. В коробке находится 8 красных и 6 белых таблеток. Из коробки последовательно без возвращения извлекают 3 таблетки. Найти вероятность того, что все 3 таблетки белые.

Р е ш е н и е . Обозначим; A_1 - первая таблетка белая, A_2 -вторая таблетка белая, A_3 - третья таблетка белая.

$$P(\mathrm{A1A2A3}) = P(\mathrm{A1})\,P(\mathrm{A2/A1}) \cdot P(\mathrm{A3/A1A2})\,; P(\mathrm{A}_1) = \frac{6}{14}; P(\mathrm{A}_2/\mathrm{A}_1) = \frac{5}{13};$$

$$P(\mathrm{A}_3/\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2) = \frac{4}{12};$$

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = \frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12} = \frac{5}{91} = 0{,}055.$$

Задача 1.16. Предположим, что в некоторой семье имеется 2 ребенка.

1. Какова вероятность, что оба ребенка – мальчики.
2. Если известно, что, по - крайней мере, один из детей - мальчик, то какова вероятность того, что оба – мальчики?
3. Если известно, что старший ребенок – мальчик, то вероятность, что оба – мальчики?

Р е ш е н и е . Надо найти P(ММ).

1. Четыре равновероятных события ММ, МД, ДМ, ДД: $P(\text{ММ}) = \frac{1}{4}$.
2. Исключается вариант ДД: $P(\text{ММ}) = \frac{1}{3}$.
3. Варианты только: ММ, МД: $P(\text{ММ}) = \frac{1}{2}$.

Закон умножения вероятностей

Произведение двух событий – это событие, состоящее в совместном появлении этих событий (A и B).

Задача 1.17. Пусть имеется следующие события: A – “из колоды карт вынута дама”; B – “из колоды карт вынута карта пиковой масти”. Что представляет собой событие AB?

Р е ш е н и е :

AB есть событие “вынута дама пик”.

Событие B называются ***независимым*** от события A, если появление события A не изменяет вероятности появления события B.

Вероятность появления нескольких *независимых* событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(A{\cdot}B) = P(A){\cdot}P(B)$.

Для ***зависимых*** событий: $P(AB) = P(A){\cdot}P(B/A)$.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло.

Задача 1.18. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Р е ш е н и е $P(\text{А/В}) = P(\text{А}) \cdot P(\text{В}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Задача 1.19. Бросают 2 игральных кубика. Какова вероятность того, что на первом кубике выпадет четное число очков, а на втором - число, меньше 6?

Р е ш е н и е $P(\text{А/В}) = P(\text{А}) \cdot P(\text{В}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$.

Задача 1.20. Найти вероятность того, что в семьях из двух детей 1) оба ребенка – мальчики; 2) оба ребенка – девочки; 3) старший ребенок мальчик, а младший – девочка. Вероятность рождения мальчика 0,515.

Р е ш е н и е

$$P(\text{ММ}) = P(\text{М}) \cdot P(\text{М}) = 0{,}515 \cdot 0{,}515 = 0{,}265;$$

$$P(\text{ДД}) = 0{,}485 \cdot 0{,}485 = 0{,}235;$$

$$P(\text{МД}) = 0{,}515 \cdot 0{,}485 = 0{,}25.$$

Задача 1.21. Известно, что в 3 случаях из 250 на свет появляются близнецы, причем, в одном случае – это истинные (монозиготные) близнецы. Какова вероятность, что у определенной беременной женщины родятся близнецы мальчик и девочка. Учтите, что однояйцовые близнецы никогда не бывают разных полов – это обязательно либо 2 мальчика, либо 2 девочки.

Р е ш е н и е . Вероятность иметь дизиготных близнецов равна:

$$P(A) = \frac{3}{250}; \qquad 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Искомая вероятность: $P(\text{А}){\cdot}P(\text{В}) = \frac{3}{250} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{250}$.

Задача 1.22. Вероятность того, что студент в летнюю сессию сдаст первый экзамен равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: 1) только 2-й экзамен 2) все 3 экзамена.

Р е ш е н и е .

1) $P(\text{В}) = P(\overline{\text{А}}_1 \text{А}_2 \overline{\text{А}}_3) = P(\overline{\text{А}}_1) \cdot P(\text{А}_2) \cdot P(\overline{\text{А}}_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}018$.

2) $P(\text{А}_1 \text{А}_2 \text{А}_3) = P(\text{А}_1) \cdot P(\text{А}_2) \cdot P(\text{А}_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}648$.

Задача 1.23. Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий такова: $P_1 = 0{,}75$; $P_2 = 0{,}8$; $P_3 = 0{,}85$. Какова вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех этих орудий?

Р е ш е н и е

$g_1 = 1 - P_1 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$;

$g_2 = 1 - P_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$;

$g_3 = 1 - P_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$;

$P(\text{А}) = 1 - g_1 g_2 g_3$;

$P(\text{А}) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 = 0{,}9925$.

Задача 1.24. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

Р е ш е н и е . Вероятность того, что в мишень попадет первый стрелок и не попадет второй равна

$P(\text{А}_1 \overline{\text{А}}_2) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14$.

Вероятность того, что попадет второй стрелок в мишень и не попадет первый равна:

$P(\overline{\text{А}}_1 \text{А}_2) = (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$.

Вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок, равна сумме этих вероятностей:

$P(\text{А}_1 \overline{\text{А}}_2) + P(\overline{\text{А}}_1 \text{А}_2) = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38$.

Задача 1.25. Сколько должна планировать пара иметь детей, чтобы вероятность хотя бы одного мальчика была выше 90%, (вероятность рождения мальчика и девочки 0,5).

Р е ш е н и е Пусть вероятность того, что все девочки:

$$P(\text{Д}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}....\frac{1}{2}n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Вероятность того, что не все девочки:

$$\text{P (хотя бы один мальчик)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}9.$$

$$0{,}1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n; \qquad \frac{1}{10} = \frac{1}{2n}; \qquad 2^n = 10 \quad \Rightarrow \quad n \approx 4.$$