ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

Тема: **Проверка статистических гипотез. Критерий Фишера. Непараметрические критерии**

1. Статистическая проверка гипотез.
2. Проверка гипотез для дисперсий. Критерий Фишера.
3. Непараметрические критерии.
4. Критерий знаков.

Статистическая проверка гипотез

Терминология

Статистические методы используют для описания данных и для оценки статистической значимости результатов опыта. **Ни одно исследование не обходится без сравнений.** Сравнивают данные опыта с контролем и т.п. Методы оценки статистической значимости различий называют ***критериями***. ***Критерий*** – это и сам метод и та величина, которая получается в результате его применения. Методов существует множество, но все они построены по одному принципу.

Итак, обратимся ко второму направлению математической статистики—проверке статистических гипотез.

Статистическая гипотеза – это любое предположение о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений. Статистическая гипотеза - это всякое высказывание о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Гипотезы будем обозначать буквой H с индексами. Будем предполагать, что у нас имеется 2 непересекающиеся гипотезы H_0 и H_1. H_0 – нулевая гипотеза (или основная). H_1 - альтернативная или конкурирующая гипотеза.

Сначала формулируют нулевую гипотезу, то есть предполагают, что исследуемые факторы не оказывают никакого влияния на исследуемую величину и полученные различия случайны. Нулевая гипотеза (H_0) всегда отвергает эффект. Например, разность средних равна нулю. Нулевая гипотеза формулируется всегда относительно генеральной совокупности (популяции) – она более интересна, чем выборка.

Затем формулируют альтернативную гипотезу (H_1), которая принимается, если нулевая гипотеза неверна. Она относится к той теории, которую собираются исследовать.

Проверка гипотез – это определение аргументов против гипотезы.

Задача проверки статистических гипотез состоит в том, чтоб на основе выборки $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ принять (т.е. считать справедливой) либо нулевую гипотезу H_0, либо конкурирующую гипотезу H_1.

Для проверки принятой гипотезы используют *статистический критерий* – это правило, позволяющее, основываясь только на выборке $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, принять либо отвергнуть нулевую гипотезу H_0. Величина рассчитываемого критерия количественно отражает аргументы в наборе данных против нулевой гипотезы. Обычно чем больше по модулю значение критерия, тем сильнее эти аргументы.

Значение критерия, полученное из выборки, связывают с уже известным распределением (теоретическим или табличным), которому оно подчиняется, чтобы определить достигнутый уровень значимости (α). Значение α - это максимально приемлемая вероятность, отвергающая нулевую гипотезу, если она верна, и тогда можно сказать, что результаты значимы на 5% уровне.

Чем меньше значение α, тем сильнее аргументы против нулевой гипотезы. Обычно полагают, что $\alpha \leq 0{,}05$. Это значит, что аргументов достаточно, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу, хотя есть небольшой шанс, что она справедлива (рис. 7.1). Значение α - это площадь обоих ″хвостов″ на графике распределения вероятностей.

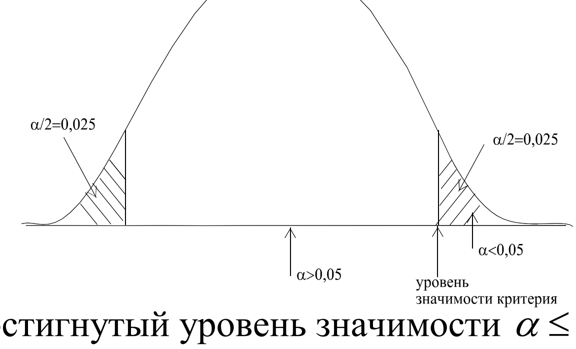

Рис.7.1. Достигнутый уровень значимости $\alpha \leq 0{,}05$

Когда отвергают нулевую гипотезу, то говорят, что результаты эксперимента статистически значимы на уровне $\alpha \leq 0{,}05$ (5%).

Если $\alpha > 0{,}05$, то аргументов недостаточно, чтобы отвергнуть H_0. В этом случае говорят, что результаты статистически незначимы на уровне $\alpha \leq 0{,}05$. Это не означает, что нулевая гипотеза истинна. Просто недостаточно аргументов, чтобы ее отвергнуть.

Различают **два вида критериев: параметрические и непараметрические.**

Параметрические критерии представляют собой функции параметров данной совокупности и используются, если совокупности, из которых взяты выборки, подчиняются нормальному закону распределения.

Часто данные не подчиняются предположениям, которые лежат в основе этих методов. В этом случае можно использовать непараметрические критерии.

Непараметрические критерии применяются, если нет подчинения распределения нормальному закону. Эти критерии обычно заменяют данные выборок знаками (плюс или минус) рангами (т.е. числами 1; 2; 3; …, описывающими их положение в упорядоченном наборе данных), категориями и т.п. Непараметрический критерий можно использовать, если объем выборки небольшой настолько, что невозможно оценить закон распределения данных. Но непараметрические критерии обладают меньшей мощностью в обнаружении реального эффекта, чем аналогичный параметрический критерий.

Общая постановка задачи проверки гипотез

1. **Формулируют (выдвигают) нулевую гипотезу** H_0 об отсутствии различий между группами, об отсутствии существенно отличия фактического распределения от некоторого заданного, например, нормального, экспоненциального и др.

Сущность нулевой гипотезы H_0: разница между сравниваемыми генеральными параметрами равна нулю, и различия, наблюдаемые между выборочными характеристиками, носят случайный характер, т.е. эти выборки принадлежат одной генеральной совокупности.

2. **Формулируют альтернативную гипотезу** H_1**.**

1. **Задают уровень значимости α.** Уровень значимости α - это вероятность ошибки отвергнуть нулевую гипотезу H_0, если на самом деле эта гипотеза верна. При $\alpha \le 0{,}05$ ошибка возможна в 5% случаев.

2. **Для проверки нулевой гипотезы используют критерии.**

Критерий – это случайная величина K, которая служит для проверки H_0. Эти функции распределения **известны и табулированы**. Критерий зависит от двух параметров: от числа степеней свободы и от уровня значимости a.

Фактическую величину критерия получают по данным наблюдения $K_{набл}$.

5. **По таблице определяют критическое значение**, превышение которого при справедливости гипотезы маловероятно $K_{крит}(\alpha, f)$.

6. **Сравнивают** $K_{набл}$ **и** $K_{крит}(\alpha, f)$.

Если $K_{набл} > K_{крит}(\alpha, f)$, то отвергают H_0 и принимают H_1.

Если $K_{набл} < K_{крит}(\alpha, f)$, то принимают H_0.

Это для **параметрических** критериев.

Если использованы **непараметрические критерии**, то наоборот: если $K_{набл} < K_{крит}(\alpha, f)$, то принимают H_1.

7. **Вывод:** различие статистически значимо $(\alpha \le 0{,}05)$ или незначимо.

Проверка гипотез для дисперсий

Пусть генеральные совокупности X_1 и X_2 распределены нормально. По независимым выборкам объемов n_1 и n_2, извлеченным из этих совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии $S^2_{x_1}$ и $S^2_{x_2}$. Требуется сравнить эти дисперсии. При заданном уровне значимости α, надо проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей.

1. $H_0: \sigma^2_{x_1} = \sigma^2_{x_2}$.

2. $H_1: \sigma^2_{x_1} \ne \sigma^2_{x_2}$.

3. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве генеральных дисперсий используем случайную величину F, равную отношению большей исправленной выборочной дисперсии к меньшей $F_{набл} = \dfrac{S_б^2}{S_м^2}$.

4. Величина F, при условии справедливости нулевой гипотезы, имеет распределения Фишера-Снедекора со степенями свободы $f_1 = n_1 - 1$ и $f_2 = n_2 - 1$, где n_1 – объем выборки, по которой вычислена большая выборочная дисперсия, n_2 – объем выборки, по которой вычислена меньшая выборочная дисперсия.

Из таблиц находим $F_{крит}(\alpha, f_1, f_2)$.

5. Сравниваем $F_{крит}$ и $F_{набл}$:

Если $F_{набл} < F_{крит}(\alpha, f_1, f_2) => H_0$, генеральные дисперсии различаются незначимо.

Пример 7.2. По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей x_1 и x_2 найдены исправленные выборочные дисперсии $S_{x_1}^2 = 11{,}41$ и $S_{x_2}^2 = 6{,}52$. При уровне значимости $\alpha \le 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0 : \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$.

Р е ш е н и е . Конкурирующая гипотеза: $H_1 : \sigma_{x_1}^2 > \sigma_{x_2}^2$;

$$F_{набл} = \frac{S_б^2}{S_м^2}; \; F_{набл} = \frac{11{,}41}{6.52} = 1{,}75;$$

$$F_{крит}(\alpha \le 0{,}05, f_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11, f_2 = 15 - 1 = 14) = 2{,}57;$$

$F_{набл} < F_{крит}(\alpha, f_1; f_2)$ $=> H_0$ – нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Значит, можно применять и критерий Стьюдента для сравнения средних.

Пример 7.3. По двум независимым малым выборкам объемов $n_1 = 5$ и $n_2 = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, найдены выборочные средние $\bar{x}_1 = 8{,}3$ и $\bar{x}_2 = 7{,}48$ и выборочные дисперсии

$S_{x_1}^2 = 0{,}25$ и $S_{x_2}^2 = 0{,}108$. При уровне значимости $\alpha \le 0.05$ проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(X_1) = M(X_2)$.

Р е ш е н и е . Так как выборочные дисперсии различны, проверим предварительно нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, пользуясь критерием Фишера-Снедекора. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{набл} = \frac{0{,}25}{0{,}108} = 2{,}31.$$

По таблице при $\alpha \le 0{,}05$ и числам степеней свободы $f_1 = 5 - 1 = 4$ и $f_2 = 6 - 1 = 5$, находим критическую точку $F_{крит}(\alpha \le 0{,}05, f_1 = 4, f_2 = 5) = 5{,}19$.

$F_{набл} < F_{крит}(\alpha, f_1, f_2)$ => H_0 – нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Теперь можно сравнить средние.

Вычислим наблюдаемое значение критерия Стъюдента:

$t_{табл} = 3{,}87$.

По таблице находим критическую точку:

$t_{крит}(\alpha \le 0{,}05, f = 5 + 6 - 2 = 9) = 2{,}26.$

Так как $t_{набл} > t_{крит}(\alpha, f)$ => H_1– выборочные средние различаются значимо.

Непараметрические критерии

Это функции, зависящие непосредственно от вариант данной совокупности с их частотами. Служат для проверки рабочих гипотез независимо от формы распределения совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Непараметрические критерии рассматривают не только количественные, но и качественные признаки, многие из которых выражаются порядковыми номерами, рангами, индексами и пр.

Например, ***критерий знаков***, ***критерий Уилкоксона-Манна-Уитни.***

Критерий знаков

Рассмотрим критерий знаков.

Требования:

1) законы распределения X и Y предполагаются неизвестными, но одинаковыми;

2) объем выборок $\approx$ **100** и больше и одинаков.

Критерий знаков применяют для проверки нулевой гипотезы H_0: совокупности, из которых взяты сравниваемые выборки, имеют одну и ту же или одинаковые функции распределения

Вводится величина $z_i = x_i - y_i$. Значения этой разности меняются от опыта к опыту по величине и знаку. Если влияние фактора незначимо, то вероятно появление как положительных n_+, так и отрицательных n_-. Из этих величин выбирают наименьшее $n_N^{набл}$, которое станет наблюдаемым значением критерия.

n_+ и $n_- => n_N^{набл} (min)$ – это наименьшее число из однозначных разностей.

Значение $n_N^{крит}$ находят по формуле или из таблиц. Если по формуле, то это целая часть числа A.

$A = \frac{(N-1)}{2} - K\sqrt{N+1}$, где

N – объем выборки. $К$ = 0,98 при $\alpha \leq 0{,}05$.

Сравниваем. Если $n_N^{набл} > n_N^{крит} => H_0$, то принимается нулевая гипотеза. Различие недостоверно. Действие фактора незначимо.

Пример 7.5. Проведено 100 опытов по изучению влияния фактора на артериальное давление. При $\alpha \leq 0{,}05$ оценить значимость различия в действии данного фактора на группы животных, если положительная разность давлений n_+ наблюдалась 48 раз, а отрицательная n – 44 раза.

Р е ш е н и е .

Из чисел 48 и 44 выбираем наименьшее – это 44: $n_N^{набл}$ = 44.

Найдем $n_N^{крит}$ по формуле:

$$A = \frac{100-1}{2} - 0{,}98 \cdot \sqrt{100+1} = 39{,}6\,.$$

Целая часть числа – 39: $n_N^{крит} = 39$.

44 > 39, $n_N^{набл} > n_N^{крит}$ => H_0.

Принимаем H_0. Влияние фактора незначимо.