ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина – это величина, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно – заранее неизвестно).

Дискретная случайная величина – это случайная величина, когда принимает отдельное изолированное, счетное множество значений.

Непрерывная случайная величина – это случайная величина принимающая любые значения из некоторого интервала. Понятие непрерывной случайной величины возникает при измерениях.

Случайные величины обозначаются конечными заглавными буквами латинского алфавита ***X, Y, Z,*** а их значения – соответствующими строчными буквами ***x, y, z.***

Закон распределения случайной величины

Закон распределения случайной величины - это всякое **соотношение,** устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для ***дискретной*** случайной величины закон распределения может быть задан в виде ***таблицы***, аналитически (в виде ***формулы***) и ***графически.***

x_1	x_2	…..	x_n
p_1	p_2	…..	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие их вероятности. Соединение образует ломанную линию.

Это **многоугольник** или **полигон** распределения вероятностей.

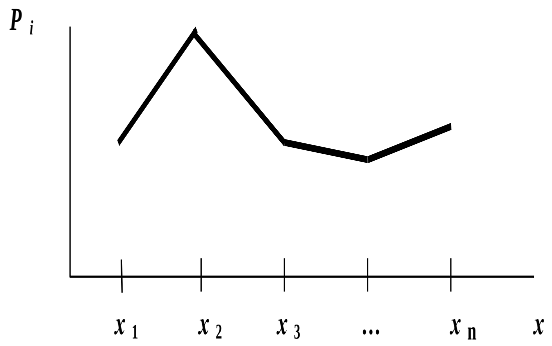


Рис.2.1. Полигон распределения вероятностей.

Задача 2.1. Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

А)

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Б)

x_i	6	7	8	9
p_i	0,1	0,2	0,3	0,5

Р е ш е н и е

А) Да, т.к. выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$: 0,1+0,4+0,3+0,2=1.

Б) Нет: $0,1+0,2+0,3+0,5 \neq 1$.

Задача 2.2. В денежной лотерее выпушено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 рублю. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Р е ш е н и е Возможные значения X

x_i	50	1	0
p_i	0,01	0,1	0,89

$$P_1 = \frac{1}{100}; \quad P_2 = \frac{10}{100}; \quad P_3 = 1 - (P_2 + P_1).$$

Контроль: 0,01+0,1+0,89 = 1.

Задача 2.3. Вероятность того, что студент сдаст семестровый экзамен по биофизике равно 0,1, а по биохимии – 0,9. Составьте закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

Р е ш е н и е Возможные значения X - число сданных экзаменов: 0,1,2.

Считаем вероятности:

$$P(X=0)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)=(1-0{,}7)\cdot(1-0{,}9)=0{,}3\cdot 0{,}1=0{,}03;$$

$$P(X=1)P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)=$$
$$=0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0.9=0{,}34;$$
$$P(X=2)=P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}63.$$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

Функция распределения случайных величин

Функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше некоторого фиксированного x, называется функцией распределения случайной величины X: $F(x)=P(X<x)$. Ее также называют ***интегральной функцией распределения*** дискретных и непрерывных случайных величин.

Задача 2.4 Дан ряд распределения случайной величины

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти и изобразить графики ее функции распределения.

Р е ш е н и е . Будем задавать различные значения x_i и находить для них $F(x)$:

1.Если $x\le 1$, $F(x)=0$.

2.Пусть $1<x\le 4$, (например, $x=2$), $F(x)=P(x=1)=0{,}4.$

3.Пусть $4<x\le 5$, (например, $x=4{,}25$),

$F(x)=P(X<x)=P(x=1)+P(x=4)=0{,}5+0{,}4=0{,}5$.

1. Пусть $5<x\le 7$,

$F(x)=(P(x=1)+P(x=4)+P(x=5)=0{,}5+0{,}3=0{,}8$.

2. Пусть $x>7$,

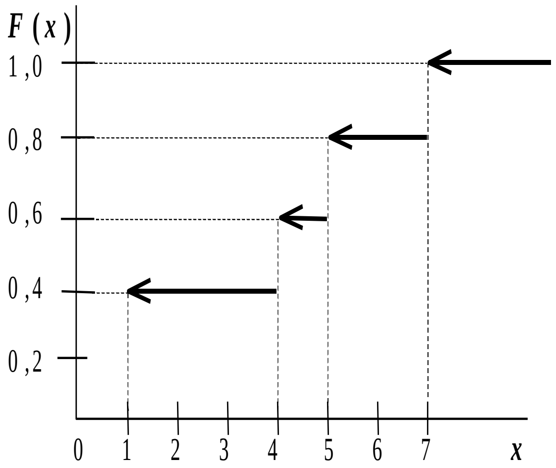


Рис.2.2. Функция распределения дискретной случайной величины.

$$F(x) = (P(x=1) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=5) = 0{,}8 + 0{,}2 = 1.$$

Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующие возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

Числовые характеристики дискретной случайной величины

1. ***Математическое ожидание M(X)*** дискретной случайной величины X - это сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,.$$

2. ***Дисперсия*** дискретной случайной величины.

Слово «дисперсия» означ*ает “**рассеяние**”*

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Дисперсией $D(x)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания.

3. ***Среднее квадратическое отклонение*** σ (**стандартное отклонение** или стандарт) случайной величины X - это арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}\,.$$

Задача 2.5 Случайная величина X задана законом распределения

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

Вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Р е ш е н и е

$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ =1·0,3+2·0,5+5·0,2 = 2,3.

D (X)= M(X-M(X))^2 = (1-2,3)^2·0,3+(2-2,3)^2·0,5+(5-2,3)^2·0,2=2,01

$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{2{,}01}\approx 1{,}42$

Плотность распределения вероятности непрерывных случайных величин

Плотность вероятности или плотность распределения f(x) непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения:

$$f(x)=F'(x).$$

Ее также называют ***дифференциальной*** функцией распределения.

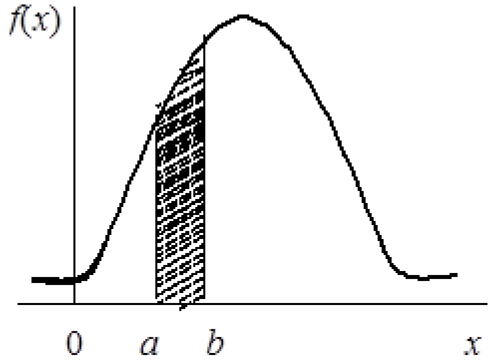


Рис.2.3. Плотность распределения

Свойство плотности вероятности:

1. Неотрицательная функция $f(x)\geq 0$.
2. **Площадь фигуры**, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна **единице.**
3. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал [a,b] равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от a до b.

$$P(a\leq x\leq b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Геометрическая интерпретация

Полученная вероятность равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения и опирающийся на отрезок [a,b].

Непрерывная случайная величина описывается следующими числовыми характеристиками:

1. Математическое ожидание: $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$.

2. Дисперсия: $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(x))^2\cdot f(x)dx$ или

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M(x))^2 .$$

Задача 2.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, если плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при X} \le 0;\\ 1, & \text{при } 0<x<1;\\ 0, & \text{при X} > 1.\end{cases}$$

Р е ш е н и е . $M(x)=\int\limits_0^1 1xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$.

$$Д(x)=\int\limits_0^1 x^2 1dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Важной характеристикой центра распределения случайных величин является срединная точка, или медиана. Медиана равна такому значению случайной величины, которое делит пополам площадь под кривой плотности распределения (рис. 2.4):

$$\int\limits_{-\infty}^{Me} f(x)dx=0{,}5 \text{ или } P(X>Me)=P(X<Me).$$

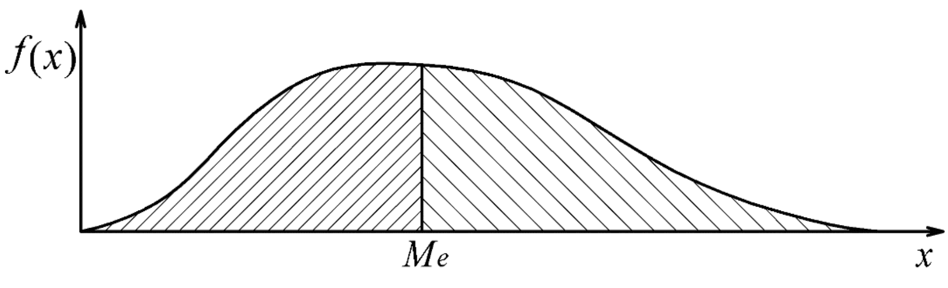


Рис. 2.4. Определение медианы случайной величины

Часто применяется еще одна характеристика положения — *мода* случайной величины.

Мода — это значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность (рис. 2.5). Однако это определение подходит только для одномодальных распределений. В общем случае мода — это такое значение случайной величины, что предшествующие и последующие за ними значения имеют меньшие вероятности. Например, на рис. 2.5 показано бимодальное распределение.

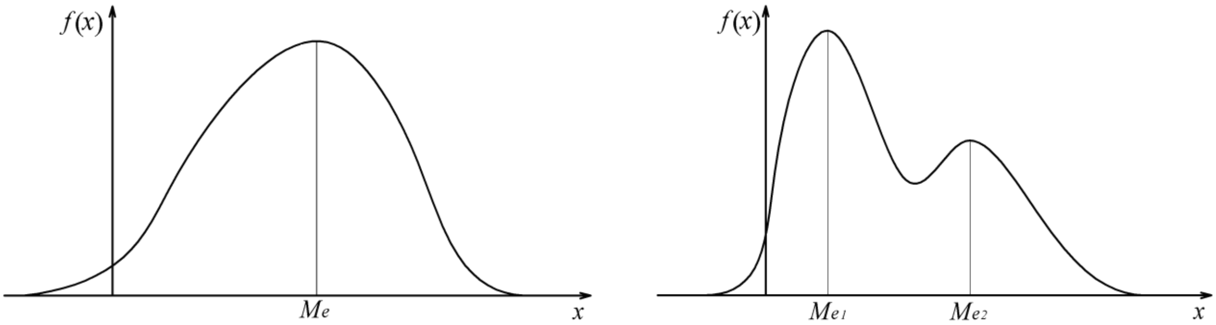


Рис. 2.5. Одномодальное и бимодальное распределение случайной величины

В случае симметричного одномодального распределения математическое ожидание совпадает с модой и медианой.

Нормальный закон распределения

Этот закон наиболее часто встречается на практике. Он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения. Нормальное распределение является одним из самых важных распределений в статистике. **Обычно все сравнивают с нормальным законом распределения.**

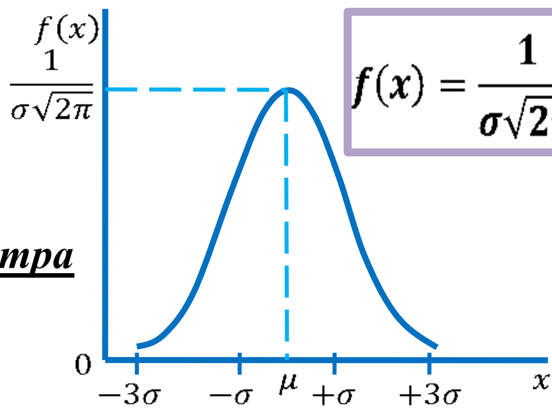
Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами μ и σ^2, если ее плотность вероятности имеет вид: (рис.2.6),

Карл Фридрих Гаусс

Два параметра

1 $\mu(x)$

2 σ



$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Рис. 2.6 График кривой нормального распределения

Свойства функции плотности распределения вероятностей

- Она колоколообразная ("колокол Гаусса"), иначе унимодальная.
- Плотность определяется двумя параметрами: математическим ожиданием (μ) и средним квадратическим отклонением (σ).
- Симметричная относительно среднего.
- Среднее и медиана нормального распределения равны.
  - Кривая сдвигается вправо, если среднее увеличивается при постоянном квадратическом отклонении и влево, если среднее увеличивается.
  - Кривая расширяется, если среднее квадратическое отклонение σ увеличивается (если среднее постоянно).
  - Кривая становится более остроконечной с меньшей шириной основания колокола, если σ уменьшается, если среднее постоянно (площадь под графиком всегда равна 1).

<u>Правило «трех сигм»</u>

$\pm\boldsymbol{\sigma} - 68\%$ наблюдений

$\pm 2\boldsymbol{\sigma} - 95\%$

$\pm 3\boldsymbol{\sigma} - 99{,}7\%$

Задача 2.7 Построить графики для случая $\mu_1 > \mu_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$

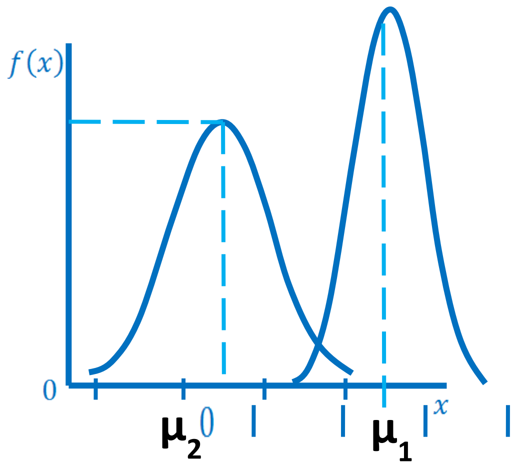


Рис. 2.7

<u>Экспоненциальный закон распределения</u>

Экспоненциальное (показательное) распределение – это распределени которое описывается дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ \end{cases}$$

$\lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$

Экспоненциальное распределение определяется ***<u>одним</u>*** параметром **λ**

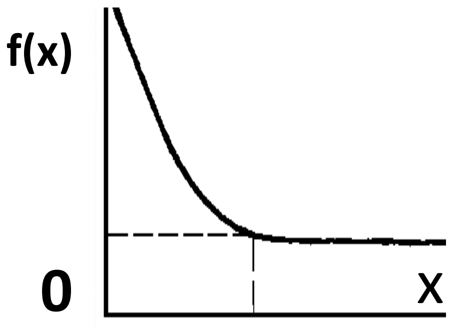


Рис.2.8 График плотности функции распределения экспоненциального распределения

***Примеры*:** Время между появлениями двух *последовательных* событий.

- Интервалы времени до поступления первого телефонного звонка на станцию;
- Время ожидания такси