ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Кафедра медицинской физики, математики и
информационных технологий

А.А. Демидова, Н.В. Карасенко, Г.В. Антоненко,
К.С. Караханян, С.В. Доронкина, Н.Г. Короткиева,
В.Г. Коршунов, И.О. Михальчич

ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Под редакцией Н.В. Карасенко

Рекомендовано Координационным советом по области образования «Здравоохранение и медицинские науки» в качестве учебного пособия для использования в образовательных учреждениях, реализующих основные профессиональные программы высшего образования по программам специалитета 31.05.01 «Лечебное дело», 31.05.02 «Педиатрия».

Ростов-на-Дону
2026

УДК 53:51 (075.8)
ББК 22.3:22.1я7
Ф 50

Физика, математика : учебное пособие / А.А. Демидова, Н.В. Карасенко, Г.В. Антоненко [и др.] ; ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России, каф. мед. физики, математики и информац. техн. - Ростов-на-Дону : Изд-во РостГМУ, 2025. - 304 с.
ISBN 978-5-7453-0620-4

Учебное пособие соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования. Издание содержит материалы для практических занятий по математике и физике, включающие теоретические разделы, разбор типовых задач, комплекты тестовых заданий для контроля знаний, а также задачи для самостоятельной работы с приведенными ответами.

Предназначено для обучающихся в медицинских вузах по специальностям 31.05.01 Лечебное дело, 31.05.02 Педиатрия.

Рецензенты:

Благин А.В. - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Физика» ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет».

Малышевский В.С. **-** доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет».

Утверждено центральной методической комиссией ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России. Протокол № 4 от 27.05.2025 г.

Одобрено на заседании кафедры медицинской физики, математики и информационных технологий ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России. Протокол № 9-2024/25 от 13.05.2025 г.

ISBN 978-5-7453-0620-4

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Физика, математика» подготовлено коллективом авторов кафедры медицинской физики, математики и информационных технологий Ростовского государственного медицинского университета и предназначено для обучающихся по специальностям «Лечебное дело» и «Педиатрия».

Основная цель пособия - сформировать у будущих врачей фундаментальное понимание ключевых математических и физических концепций, лежащих в основе современных медицинских технологий, диагностических методов и анализа биологических данных. В условиях цифровизации здравоохранения и роста роли доказательной медицины изучение статистики, теории вероятностей и биофизики становится профессиональной необходимостью.

Структура и содержание пособия отражают его практико-ориентированный характер. Первые пять глав посвящены основам теории вероятностей, математической статистики и анализу данных - от простых вероятностных моделей до проверки гипотез и корреляционно-регрессионного анализа. Каждый теоретический раздел подкреплен примерами, взятыми из медицинской практики. Это позволяет студентам не только освоить теорию, но и увидеть ее непосредственное применение в профессиональной деятельности.

Вторая часть пособия (главы 6–9) раскрывает физические основы жизненно важных процессов: механику кровообращения и дыхания, реологические свойства биологических жидкостей, транспорт через клеточные мембраны, генерацию и распространение биоэлектрических потенциалов.

Дидактический аппарат включает:

- Разбор типовых задач с подробными решениями.
- Комплекты тестовых заданий для контроля знаний.

- Задачи для самостоятельной работы с приведенными ответами.
- Графики, схемы и таблицы, облегчающие визуализацию сложных понятий.

Авторский коллектив выражает особую благодарность Виталию Петровичу Омельченко, долгие годы руководившему кафедрой медицинской и биологической физики РостГМУ. Многие дидактические и методические материалы, а также практические задачи, созданные им лично и в соавторстве, легли в основу данного пособия. Кроме того, именно его учебники и пособия для медицинских вузов стали основой при формировании содержания разделов, посвященных статистическому анализу.

Авторы выражают благодарность всем сотрудникам кафедры за участие в подготовке тестовых заданий ко всем разделам пособия. Отдельные слова признательности Кручининой Е.В., Михальчич И.О. за вычитку рукописи и ценные замечания, способствовавшие повышению точности и ясности изложения материала.

Авторы признательны рецензентам Благину А.В. - доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой «Физика» ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» и Малышевскому В.С. - доктору физико-математических наук, профессору кафедры общей физики ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» за прочтение рукописи и ценные замечания.

Авторы надеются, что предлагаемое пособие окажет существенную помощь студентам в изучении физики и математики и будет способствовать формированию клинического мышления, основанного на точных количественных методах.

1. Основы теории вероятностей.

Теория вероятностей - раздел математики, изучающий закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Случайным событием называют событие, исход которого заранее предсказать невозможно, даже при полном знании условий опыта. Случайность обусловлена совокупностью объективно существующих факторов, влияющих на результат, но не поддающихся полному учёту или контролю. Примерами служат результат броска игральной кости, симметричной монеты, выигрыш в лотерее или количество студентов в аудитории.

Хотя результат отдельного испытания непредсказуем, при многократном его повторении проявляются устойчивые закономерности. Так, при подбрасывании симметричной монеты относительные частоты выпадения «орла» и «решки» стремятся к 0,5. Эти эмпирические наблюдения свидетельствуют о том, что случайные явления подчиняются статистическим закономерностям, которые проявляются в совокупности большого числа испытаний. Фундаментальным обоснованием этого служит закон больших чисел - один из центральных результатов теории вероятностей.

1.1. Основные понятия теории вероятностей

Испытание **-** комплекс условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз. В зависимости от характера воздействия исследователя, испытания делятся на *активные* (эксперимент: лабораторный опыт, клинические испытания) и *пассивные* (наблюдение: регистрация космических излучений)**.**

Событие - это результат испытания. События обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C ...

Например: событие А – выигрыш в лотереи, В – рождение близнецов, С - выпадение осадков.

Классификация событий

1. ***Достоверное событие*** -это событие, которое обязательно произойдет в результате испытания.

   Например: выпадение числа от 1 до 6 при броске стандартной игральной кости.

2. ***Невозможное событие*** - это событие, которое не может произойти в данном испытании.

   Например: выпадение числа 7 на стандартной игральной кости.

3. ***Случайное событие*** – это событие, которое при испытаниях может произойти или не произойти.

   Например: завтра будет солнечный день.

Отношения между событиями

- **Равновозможные события.** События, для которых нет оснований ожидать, что одно произойдёт чаще другого (например, выпадение любой грани симметричного кубика).
- **Полная группа событий.** Набор попарно несовместных событий, одно из которых обязательно происходит в испытании (например, при броске кубика полную группу образуют события «выпало 1», «выпало 2», …, «выпало 6»).
- **Противоположное событие ($\bar{A}$).** Событие $\bar{A}$ называется противоположным событию A, если при испытании одно из них обязательно произойдет. Несовместные события A и $\bar{A}$ образуют полную группу.
- **Благоприятствующее событие.** Событие A благоприятствует событию B, если наступление A влечёт наступление B (например, выпадение числа 3 при броске кубика благоприятствует событию «выпало нечётное число»).

1.2. Классическое и статистическое определение вероятности события

Поскольку одни случайные события происходят чаще, а другие реже, для сравнения их возможности вводится вероятность - числовая характеристика степени объективной возможности наступления события. Вероятность обозначается $P(A)$ (от англ. $probability$).

Классическое определение вероятности применяется в идеализированной схеме, когда все элементарные исходы испытания:

1. Равновозможны.
2. Попарно несовместны.
3. Образуют полную группу.

Классическое определение вероятности: *Вероятностью случайного события A называется отношение числа исходов* m, *благоприятствующих событию A, к общему числу всех равновозможных несовместных исходов* n:

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (1.1)$$

Например, студент из 60 предложенных экзаменационных вопросов успел выучить *45*. Определить вероятность того, что выбранный на удачу вопрос окажется выученным.

Число исходов, благоприятствующих искомой вероятности равно *45*, общее число исходов равно *60*. Таким образом

$$P(A)=\frac{45}{60}=0,75$$

Свойства вероятности:

1. Вероятность случайного события A находится между 0 и 1.

$$0 \le P(A) \le 1$$

2. Вероятность достоверного события равна 1.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

3. Вероятность невозможного события равна 0.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

Пример 1.1. Найти вероятность выпадения числа кратного 2 при одном бросании игрального кубика.

Решение. Событие А – выпадение числа кратного 2. Этому событию благоприятствуют три исхода: числа 2, 4 и 6, т.е. m = 3. Общее число исходов состоит в выпадении чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, т.е. n = 6. Очевидно, что эти события равновозможны и образуют полную группу. Тогда искомая вероятность, по определению, равна отношению числа благоприятствующих исходов к числу всех исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Пример 1.2. В урне 5 белых, 5 красных и 10 синих шаров. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет цветным (не белым).

Решение. Число исходов, благоприятствующих событию А, равно сумме красных и синих шаров: m = 15. Общее число равновозможных несовместных исходов равно общему числу шаров в урне: n = 20. Тогда:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{20} = 0{,}75$$

На практике не всегда возможно определить все равновозможные исходы испытания, что ограничивает применение классического подхода. В таких случаях используют статистическую оценку вероятности на основе эмпирических данных. Для этого вводится понятие *относительной частоты* появления события А, как отношения числа испытаний m, в которых произошло событие А, к общему числу испытаний n:

$$\omega(\text{А}) = \frac{m}{n}.$$

Например: из 5000 замоченных семян пшеницы проросло 4500. Относительная частота всхожести:

$$\omega(\text{A}) = \frac{m}{n} = \frac{4500}{5000} = 0{,}9$$

Статистическое определение вероятности: *Вероятностью события А называется предел, к которому стремится его относительная частота при неограниченном увеличении числа испытаний, проведённых в одинаковых условиях:*

$$P(\text{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}. \qquad (1.2)$$

Сравнение формул 1.1 и 1.2 показывает, что классическое определение вероятности является абсолютно точным, а статистическое более приближенной оценкой вероятности события и зависит от числа проведенных испытаний.

Я. Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота события А будет сколь угодно мало отличаются от вероятности события А.

1.3. Теоремы сложения вероятностей

Совместные и несовместные события

- **Совместные события:** появление одного события не исключает появление другого в одном испытании.
- **Несовместные события:** появление одного события исключает появление другого в одном испытании.

Например: при бросании игрального кубика событие *А*- «четное число», событие *В*- «число 2», событие *С*- «число 5».

Событие *А* и *В* - совместные, а события *А* и *С*, *В* и *С* несовместные.

Теорема (для несовместных событий). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$\text{P(A + B) = P(A) + P(B)}$$

Доказательство. Пусть из n равновозможных несовместных исходов, событию А благоприятствует m_1 исходов, а событию В - m_2 исходов. Так как А и В несовместные события, то событию А + В будет благоприятствовать $m_1 + m_2$ исходов. Следовательно:

$$\mathrm{P(A+B)} = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

Теорема обобщается на любое конечное число попарно несовместных событий:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

Следствия:

Следствие 1. *Если события A_1, A_2, ..., A_n образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = 1$$

Следствие 2. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е.*

$$\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\bar{A}) = 1$$

Пример 1.3. Найти вероятность выпадения 2 или 3 на игральном кубике.

Решение.

$$\mathrm{P(A + B) = P(A) + P(B)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Пример 1.4. Получена партия одежды в количестве 40 штук. Из них 20 комплектов мужской одежды, 6 – женской и 14 – детской. Найти вероятность того, что взятая наугад одежда окажется не женской.

Решение.

Событие А – одежда мужская. Вероятность $\mathrm{P(A)} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$.

Событие В – одежда женская, $\mathrm{P(B)} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$.

Событие С – одежда детская, $\mathrm{P(C)} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$.

Тогда $\mathrm{P(A + C) = P(A) + P(C)} = \frac{1}{2} + \frac{7}{20} = \frac{17}{20}$.

В том случае, если события А и В являются совместными, то справедлива следующая теорема.

Теорема (для совместных событий). Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их совместного наступления, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Доказательство. Если m_1 исходов благоприятствуют событию А, m_2 – событию В, а l исходов благоприятствуют обоим событиям, тогда

$$P(A) = \frac{m_1}{n}; \qquad P(B) = \frac{m_2}{n}; \qquad P(A \cdot B) = \frac{l}{n}$$

Событие А + В состоит в том, что произошло событие А, либо событие В, либо событие А и В. Поэтому ему будет благоприятствовать $m_1 + m_2 - l$ исходов.

Следовательно,

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2 - l}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Пример 1.5. Вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,65, а второго 0,6. Найти вероятность поражения мишени при одновременных выстрелах.

Решение. События А и В совместны (мишень может быть поражена обоими). Вероятность их совместного попадания, при условии независимости стрелков:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}65 \cdot 0{,}6 = 0{,}39$$

Тогда вероятность поражения мишени хотя бы одним стрелком:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}65 + 0{,}6 - 0{,}39 = 0{,}86$$

1.4. Теоремы умножения вероятностей

Независимые и зависимые события

- Независимые события: наступление одного события не влияет на вероятность другого.

Например: результаты последовательных бросков симметричной монеты или игральной кости.

- Зависимые события: наступление одного события меняет вероятность другого.

Например: последовательное извлечение шаров из урны без возвращения, орел и решка в одном броске.

Несовместные события всегда зависимы (если одно произошло, другое невозможно).

Условная вероятность P(A/B) - вероятность наступления события A при условии, что событие B уже произошло.

Пример 1.6. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Первым извлечён черный шар. Найти вероятность того, что второй шар тоже окажется черным.

Решение. P(B) - вероятность извлечь черный шар первым: P(B)=7/10
P(A/B) - вероятность извлечь черный шар вторым, при условии, что первый был черным: P(A/B) = 6/9 (осталось 6 черных из 9 шаров).

Теорема умножения для независимых событий

Произведение событий A·B - это событие, состоящее в совместном наступлении A и B.

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A \text{ и } B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема обобщается на n независимых событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Пример 1.7. В билете 3 независимых раздела. Из 50 вопросов первого раздела студент знает 30 вопросов, из 30 вопросов второго - 25, из 30 вопросов третьего - 10. Определить вероятность правильного ответа студента по билету.

Решение. Учитывая, что ответ на каждые разделы есть независимые события A_1, A_2, и A_3, а их вероятности соответственно равны:

$$P(A_1) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5};\ P(A_2) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6};\ P(A_3) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Тогда вероятность правильного ответа на билет P(B), можно найти по формуле умножения вероятностей:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$$

Теорема умножения для зависимых событий

Теорема. *Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие осуществилось.*

$$P(A \text{ и } B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Пример 1.8. В группе из 15 человек 5 не подготовили задание. Найти вероятность того, что два первых вызванных студента окажутся неподготовленными.

Решение: Вероятность, что первый студент, которого вызовут окажется не готов: $P(A)=5/15$. Вероятность, что второй не готов при условии, что первый оказался не готов: $P(B/A) = 4/14$.

Искомая вероятность:

$$P(\text{А и В}) = P(A) \cdot P(\text{В/А}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21} \approx 0{,}1$$

Тестовый контроль

1.1. Вероятность невозможного события:

A) P = 0

B) P = - 1

C) 0 ≤ P ≤ 1

D) 0 ≤ P ≤ 100

1.2. Вероятность рождения мальчика составляет 0,5. Вероятность того, что в семье с двумя детьми оба ребенка – мальчики, равна:

A) 0,235

B) 0,25

C) 0,33

D) 0,5

1.3. Вероятность рождения мальчика равна 0,5. Вероятность того, что в семье с двумя детьми оба ребенка – девочки, равна:

A) 0,33

B) 0,25

C) 0,265

D) 0,5

1.4. Вероятность рождения мальчика равна 0,5. Вероятность того, что в семье с двумя детьми один ребенок – мальчик, другой - девочка, равна:

A) 0,235

B) 0,25

C) 0,265

D) 0,5

1.5. Вероятность случайного события:

A) P = 0

B) P = 1

C) $0 \leq P \leq 1$

D) $-1 \leq P \leq 1$

1.6. Вероятность совместного появления герба при одновременном бросании двух монет равна:

A) 0,2

B) 0,25

C) 0,5

D) 0,75

1.7. В коробке 30 таблеток: 10 красных, 5 желтых, 15 белых. Вероятность вынуть цветную таблетку равна:

A) 1/6

B) 1/3

C) 1/2

D) 2/3

1.8. В лотерее разыгрываются призы: деньги, подарки, туристические путевки. Билет может выиграть не более чем в одной категории. Для расчета вероятности выиграть какой-либо приз по одному купленному билету используют:

A) закон сложения вероятностей для несовместных событий

B) закон сложения вероятностей для совместных событий

C) закон умножения вероятностей для независимых событий

D) закон умножения вероятностей для зависимых событий

1.9. В лотерее разыгрываются призы: деньги, подарки, туристические путевки. Для расчета вероятности выигрыша по обоим из двух купленных билетов используют:

A) закон сложения вероятностей для несовместных событий

B) закон сложения вероятностей для совместных событий

C) закон умножения вероятностей для независимых событий

D) закон умножения вероятностей для зависимых событий

1.10. В ящике 10 шаров: 5 белых и 5 синих. Вынимание наугад одного белого шара и вынимание наугад одного синего шара – это события:

A) априорные

B) достоверные

C) независимые

D) несовместные

1.11. В ящике 50 шаров: 10 красных, 15 синих, 25 белых. Вероятность того, что вынутый наугад шар будет белый:

A) 0,1

B) 0,2

C) 0,3

D) 0,5

1.12. В ящике 50 шаров: 10 красных, 15 синих, 25 белых. Вероятность того, что вынутый наугад шар будет синий:

A) 0,1

B) 0,2

C) 0,3

D) 0,5

1.13. В ящике 50 шаров: 10 красных, 15 синих, 25 белых. Вероятность того, что вынутый наугад шар будет красный:

A) 0,1

B) 0,2

C) 0,3

D) 0,5

1.14. График нормального закона распределения имеет форму:

A) колокола

B) параболы

C) гиперболы

D) прямой линии

1.15. Достоверное событие:

A) происходит всегда

B) возможно произойдет

C) никогда не происходит

D) обязательно происходит совместно с другими событиями

1.16. Из букв слова «коллоквиум» наугад выбирается одна буква. Вероятность того, что эта буква будет гласной, равна:

A) 0,2

B) 0,4

C) 0,6

D) 0,8

1.17. Из букв слова «коллоквиум» наугад выбирается одна буква. Вероятность того, что эта буква будет буквой «Ю», равна:

A) 0

B) 0,2

C) 0,5

D) 0,9

1.18. Из букв слова «коллоквиум» наугад выбирается одна буква. Вероятность того, что эта буква будет буквой «Л», равна:

A) 0,2

B) 0,4

C) 0,6

D) 0,8

1.19. Из букв слова «коллоквиум» наугад выбирается одна буква. Вероятность того, что эта буква будет согласной, равна:

A) 0,2

B) 0,4

C) 0,6

D) 0,8

1.20. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру и набрал ее наугад. Вероятность ошибки равна:

A) 0,1

B) 0,5

C) 0,7

D) 0,9

1.21. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру и набрал ее наугад. Вероятность правильного набора равна:

A) 0,1

B) 0,5

C) 0,7

D) 0,9

1.22. При бросании игрального кубика возможно шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Вероятность выпадения нечетного числа очков равна:

A) 0,2

B) 0,3

C) 0,5

D) 1

1.23. При бросании игрального кубика возможно шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Вероятность выпадения числа, меньшего шести, равна:

A) 1/3

B) 1/2

C) 2/3

D) 5/6

1.24. При бросании игрального кубика возможно шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Вероятность появления четного или кратного трем числа равна:

A) 1/3

B) 2/3

C) 1/2

D) 5/6

1.25. При бросании игрального кубика возможно шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Вероятность выпадения числа, кратного трем, равна:

A) 1/3

B) 1/2

C) 2/3

D) 5/6

1.26. При стрельбе по мишени частота попаданий составила 0,7. Количество попаданий при 20 выстрелах равно:

A) 20

B) 17

C) 14

D) 6

1.27. Произведение двух случайных событий (A·B) – это такое событие, при котором происходит:

A) событие A или событие B

B) событие A и событие B

C) событие A при условии того, что произошло событие B

D) событие B при условии того, что произошло событие A

1.28. Равновозможные события:

A) происходят совместно

B) имеют одинаковую вероятность

C) никогда не происходят совместно

D) появление одного события исключает появление другого

1.29. P(A/B) – это:

A) вероятность совместного проявления двух независимых событий

B) вероятность совместного проявления двух зависимых событий

C) вероятность события А при условии, что событие В произошло

D) вероятность события В при условии, что событие А произошло

1.30. P (B/A) – это

A) вероятность совместного проявления двух независимых событий

B) вероятность совместного проявления двух зависимых событий

C) вероятность события А при условии, что событие В произошло

D) вероятность события В при условии, что событие А произошло

1.31. Случайное событие:

A) происходит всегда

B) возможно произойдет

C) никогда не происходит

D) обязательно происходит совместно с другими событиями

1.32. Согласно определениям относительной частоты встречаемости и вероятности случайного события:

A) относительная частота - это условная вероятность

B) вероятность вычисляют после опыта, частоту - до опыта

C) вероятность всегда равна относительной частоте встречаемости

D) вероятность - это предел, к которому стремится относительная частота при неограниченном увеличении числа испытаний

1.33. Среди 100 деталей, изготовленных на станке, 5 оказались бракованными. Относительная частота появления брака равна:

A) 20

B) 0,05

C) 95

D) 105

1.34. Сумма двух случайных событий (А+В) – это такое событие, при котором происходит:

A) событие А или событие В, или оба события

B) событие А и событие В

C) событие А при условии того, что произошло событие В

D) событие В при условии того, что произошло событие А

1.35. Закон умножения вероятностей для двух зависимых событий:

A) P(A и B) = P(A) · P(B/A)

B) P(A или B) = P(A) + P(B)

C) P(A или B) = P(A) + P(B) - P(A·B)

D) P(A и B) = P(A) · P(B)

1.36. Закон сложения вероятностей для двух совместных событий:

A) P(A и B) = P(A) ·P(B/A)

B) P(A или B) = P(A) + P(B)

C) P(A или B) = P(A) + P(B) - P(A·B)

D) P(A и B) = P(A) · P(B)

1.37. Вероятность события «встретить динозавра на улице» равна:

A) 0.5

B) 1

C) 0

D) - 1

1.38. Слово «медицина». Наугад выбирается одна буква. Вероятность того, что эта буква будет "Ч" равна:

A) 0,1

B) 0,15

C) 0,2

D) 0

1.39. Слово «медицина». Наугад выбирается одна буква. Вероятность того, что эта буква будет "И" равна:

A) 0,1

B) 0,15

C) 0,2

D) 0,25

1.40. Вероятность достоверного события:

A) $0 \leq P \leq 1$

B) $P>1$

C) $P = 0$

D) $P = 1$

1.41. При подбрасывании кубика выпадет число меньше 7 - это событие

A) случайное

B) зависимое

C) достоверное

D) совместное

1.42. При подбрасывании игрального кубика выпадет число больше 6 - это событие

A) случайное

B) зависимое

C) достоверное

D) невозможное

1.43. Закон сложения вероятностей для двух несовместных событий:

A) P(A и B) = P(A) ·P(B/A)

B) P(A или B) = P(A) + P(B)

C) P(A или B) = P(A) + P(B) - P(A·B)

D) P(A и B) = P(A) · P(B)

1.44. На тарелке 5 пирожков: 2 с вишней, 2 с капустой, 1 с творогом. Какая вероятность взять пирожок с творогом?

A) 0,4

B) 0,2

C) 0,1

D) 0,02

1.45. Теория вероятностей изучает:

A) случайные события

B) корреляционные зависимости

C) способы нахождения первообразной

D) выборочные характеристики

1.46. Условную вероятность применяют для событий:

A) независимых

B) зависимых

C) совместных

D) противоположных

1.47. Комплекс условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз, называется:

A) выборка

B) испытание

C) событие

D) критерий

E) частота встречаемости

1.48. Результат испытания - это

A) статистическое распределение

B) случайное событие

C) комплекс условий

D) критерий

E) частота встречаемости

1.49. Сумма вероятностей события A и противоположного ему события A равна:

A) 0

B) 0,5

C) 1

D) $0 \le P < 1$

1.50. В ящике находятся красные, синие и зеленые шары. Пусть событие А – достать из ящика зеленый шар. Тогда противоположное событие – это достать:

A) синий шар

B) красный шар

C) все красные шары

D) синий и красный

E) любой кроме зеленого

1.51. События образуют полную группу, если при испытании одно из них обязательно произойдет. Такие события являются:

A) совместными

B) независимыми

C) невозможными

D) равновероятными

E) несовместными

УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ

Инструкция для студентов. Задания состоят в выборе правильных пар из двух множеств. К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца.

1.52. Установите соответствие между законами и событиями, для которых этот закон может быть использован.

ЗАКОНЫ	**СОБЫТИЯ**
1) $P(A + B) = P(A)+P(B)$	А) Независимые
2)$P(A +B) = P(A)+P(B)-P(A{\cdot}B)$	Б) Зависимые
3) $P(A{\cdot}B) = P(A){\cdot}P(B)$	В) Совместные
4) $P(A{\cdot}B) = P(A){\cdot}P(B/A)$	Г) Несовместные

1.53. Установите соответствие между названием и формулой

НАЗВАНИЕ	**ФОРМУЛА**

1) Статистическое определение вероятности	А) Р = $\frac{m}{n}$
2) Классическое определение вероятности	Б) М (х) = $\sum X_i P_i$
3) Математическое ожидание	В) Р = $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n}$
4) Дисперсия	Г) $m = \frac{S}{\sqrt{n}}$
	Д) D(x)= M(X-M(X))^2

1.54. Установите соответствие между событиями и вероятностями

СОБЫТИЯ	ВЕРОЯТНОСТИ
1) Равновозможные	А) Р (А)+ Р($\overline{A}$)=1
2) Невозможные	Б) Р (А) = 1
3) Достоверные	В) Р (А) = 0,8
4) Противоположные	Г) Р (А) = 0
	Д) Р (А) = Р(В)

1.55. Установите соответсвтие между событиями и их типом

СОБЫТИЯ	ТИП
1) Извлечение карт без возврата Событие А: первая карта - туз Событие В: вторая карта - туз	А) Зависимые Б) Независимые
2) Подбрасывание монеты дважды Событие А: выпадение орла в первом броске Событие В: выпадение решки во втором броске	
3) Выпадение числа 6 на двух кубиках	
4) Однократное подбрасывание монеты Событие А: выпадение орла	

Событие В: выпадение решки	

1.56. Установите соответсвтие между событиями и их типом

СОБЫТИЯ	**ТИП**
1) Событие А: наличие артериальной гипертензии Событие В: наличие сахарного диабета	А) Несовместные Б) Совместные
2) Событие А: беременность Событие В: мужской пол	
3) Событие А: у пациента миопия Событие В: пациент имеет нормальное зрение	
4) Событие А: беременность Событие В: женский пол	

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

1.57. Брошены две монеты и игральная кость. Вероятность совмещения событий: «появился орел», «появился орел», «появилось нечетное число очков» равна…….

1.58. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Вероятность того, что будет вынута пика или туз равна……

1.59. Среди 1000 лотерейных билетов имеется 100 выигрышных. Вероятность того, что три, один за другим выбранных билета, будут выигрышными, равна…….

1.60. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Вероятность определите в виде десятичной дроби с точностью до сотых.

- Вероятность того, что в семьях из двух детей первый ребенок - мальчик, второй – девочка равна………
- Вероятность того, что в семьях из двух детей один из детей - мальчик, другой – девочка равна……
- Вероятность того, что в семьях две девочки……

1.61. В аптечке находится 10 белых и 5 розовых таблеток. Из аптечки дважды берут наудачу по одной таблетке, не возвращая их назад. Вероятность появления белой таблетки во втором случае, если сначала достали розовую таблетку, равна…….

1.62. В большой популяции плодовой мушки 25% мух имеют мутацию глаз, 50% - мутацию крыльев, а 40% мух с мутацией глаз имеют и мутацию крыльев. Вероятность того, что у мухи наудачу, выбранной из этой популяции, окажется хотя бы одна из этих мутаций, равна……

1.63. Пусть вероятность того, что забег выиграет первый студент равна 1/3, а вероятность того, что забег выиграет второй студент равна 1/5. Вероятность того, что забег выиграет один из них, равна……..

1.64. Один стрелок поражает цель с вероятностью 0,85, а другой поражает цель с вероятностью 0,7. Вероятность поражения цели равна………..

1.65. Медсестра обслуживает трех пациентов. Вероятность того, что в течение часа пациент потребует внимания медсестры, равна для первого пациента – 0,2, для второго – 0, 5, для третьего – 0,7**.** Вероятность того, что по крайней мере один из пациентов не потребует внимания медсестры в течение часа, равна…...

1.66. В урне находятся 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором - черный и при третьем – синий равна…. Полученное значение вероятности округлите до тысячных.

1.67. В ящике находится 130 шаров: 18 красных, 50 синих, 42 желтых и 20 белых. Вероятность того, что вынутые один за другим два шара будут цветными, равна……...

1.68. На медицинском предприятии 95% изготовленных деталей признаются годными. При этом из каждой сотни годных деталей 70% оказываются первого сорта. Вероятность того, что изделие, изготовленное на этом предприятии, будет первого сорта, равна……

1.69. За определенный срок наблюдения зарегистрировали 14 солнечных и несколько пасмурных дней. Вероятность солнечного дня составила 0**,7**. Пасмурных дней было……

1.70. Бросают два игральных кубика. Вероятность того, что на первом кубике выпадет четное число очков, а на втором – число меньше 6 равна……. Ответ округлите до сотых.

1.71. 80 пробирок находятся в ящике. Из них 4 имеют трещины. Вероятность того, что вынутые одна за другой две пробирки окажутся с трещинами равна…

2. Случайные величины и их законы распределения

2.1. Понятие случайной величины

Случайной величиной называют числовую характеристику, значение которой определяется исходом случайного эксперимента и заранее неизвестно. Она отражает количественное проявление случайного явления и зависит от множества неподконтрольных исследователю факторов.

Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита (X, Y, Z), а их конкретные реализации - строчными (x, y, z).

Типы случайных величин

Тип	Определение	Способ получения	Примеры
Дискретная	Принимает отдельные счетные значения	Результат счета	Число пациентов, количество мутаций в гене
Непрерывная	Принимает любые значения в интервале (несчётное множество)	Результат измерения	Температура, уровень гемоглобина, время реакции

Специально отметим, что для полного описания случайной величины недостаточно указать лишь набор её возможных значений - необходимо знать, с какой вероятностью каждое из этих значений реализуется.

2.2. Законы распределения случайных величин

Закон распределения случайной величины - это правило, устанавливающее соответствие между её возможными значениями и вероятностями этих значений.

Для дискретных величин закон распределения может быть задан:

- **Таблично** (ряд распределения);
- **Графически** (многоугольник распределения);

- **Аналитически** (формулой).

Ряд распределения выглядит так:

Значение случайной величины x_i	x_1	x_2	…	x_n
Вероятности значений $P(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Так как в результате испытания случайная величина X всегда примет одно из своих возможных значений x_1, x_2, ... x_n, то выполняется условие нормировки:

$$\boldsymbol{p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$$

Пример 2.1. В выборке из 50 пациентов зафиксирована частота пульса (уд/мин). Относительные частоты интерпретируются как *эмпирические вероятности*. График таких данных (многоугольник распределения) визуализирует, какие значения встречаются чаще.

Таблица 2.1

Распределение частоты пульса в группе из 50 человек

X, уд/мин	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Абсолютная частота встречаемости	2	2	4	5	7	8	9	6	3	2	2
Относительная частота встречаемости	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$
Эмпирические вероятности	0,04	0,04	0,08	0,1	0,14	0,16	0,18	0,12	0,06	0,04	0,04

Решение. По данным таблицы построен график (рис.2.1), который называется *многоугольником распределения вероятностей.*

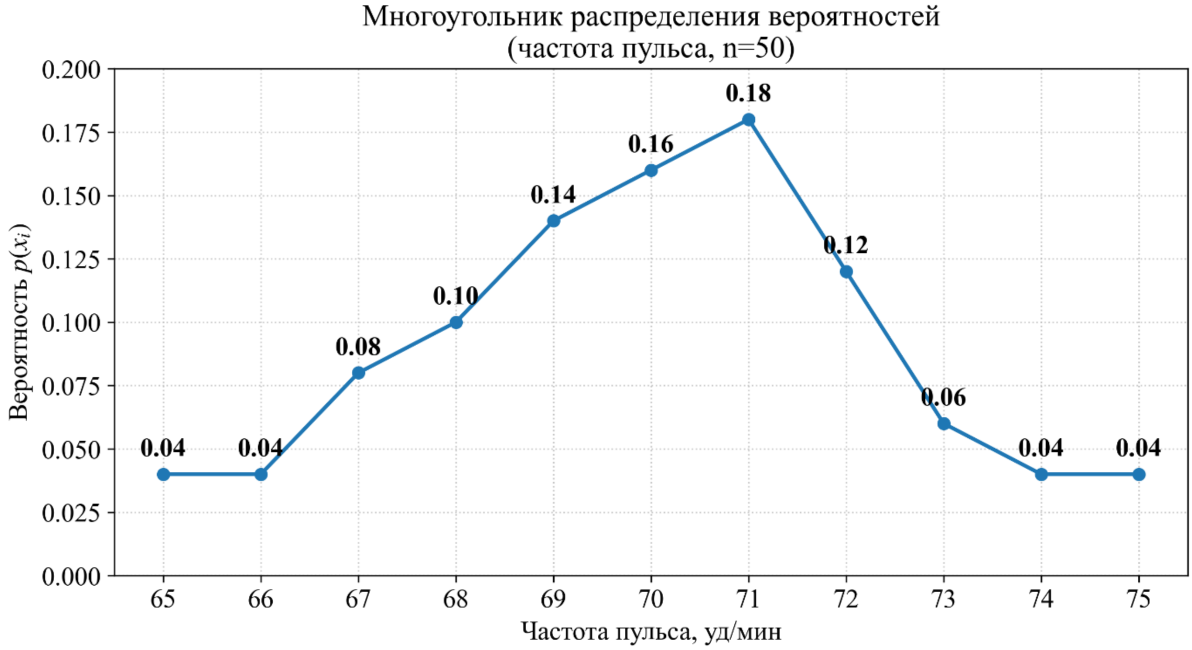


Рис. 2.1. Многоугольник распределения вероятностей частоты пульса в группе из 50 человек.

Для непрерывных случайных величин закон распределения нельзя задать таблицей, так как вероятность принятия любого конкретного значения равна нулю: P(X=x)=0. Вместо этого используют *функцию распределения* и *плотность распределения*.

2.3. Функция распределения

Функция распределения определяет вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньше числа x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию распределения F(x) также называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Функцию F(x) получают, суммируя значения вероятностей по тем значениям случайной величины, которые меньше x_i, т. е.

$$F(x_i) = P(X < x_i) = \sum_{x<x_i} P(x_i)$$

где неравенство $x < x_i$ под знаком суммы означает, что суммирование распространяется на все значения x меньше x_i.

Пример 2.2. Используя данные таблицы 2.1. построить интегральную функцию распределения частоты пульса.

Решение. Интегральная функция распределение $F(x)$ – это накопленная вероятность всех значения, строго меньших x. Рассмотрим поведение $F(x)$ на разных участках числовой прямой.

Таблица 2.2

Интервал для x	Значения X, меньшие x	$F(x) = P(X < x)$
$x \le 65$	нет значений	0
$65 < x \le 66$	65	0.04
$66 < x \le 67$	65, 66	0.04+0.04=0.08
$67 < x \le 68$	65, 66, 67	0.04+0.04+0.08=0.16
$68 < x \le 69$	65, 66 ,67, 68	0.16+0.1=0.26
$69 < x \le 70$	65, 66 ,67, 68, 69	0.26+0.14=0.4
$70 < x \le 71$	65, 66 ,67, 68, 69, 70	0.4+0.16=0.56
$71 < x \le 72$	65, 66 ,67, 68, 69, 70, 71	0.56+0.18=0.74
$72 < x \le 73$	65, 66 ,67, 68, 69, 70, 71, 72	0.74+0.12=0.86
$73 < x \le 74$	65, 66 ,67, 68, 69, 70, 71, 72, 73	0.86+0.06=0.92
$74 < x \le 75$	65, 66 ,67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74	0.92+0.04=0.96
$75 < x \le 76$	65, 66 ,67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75	0.96+0.04=1

График интегральной функции, по данным таблицы 2.2, приведен на рис. 2.2.

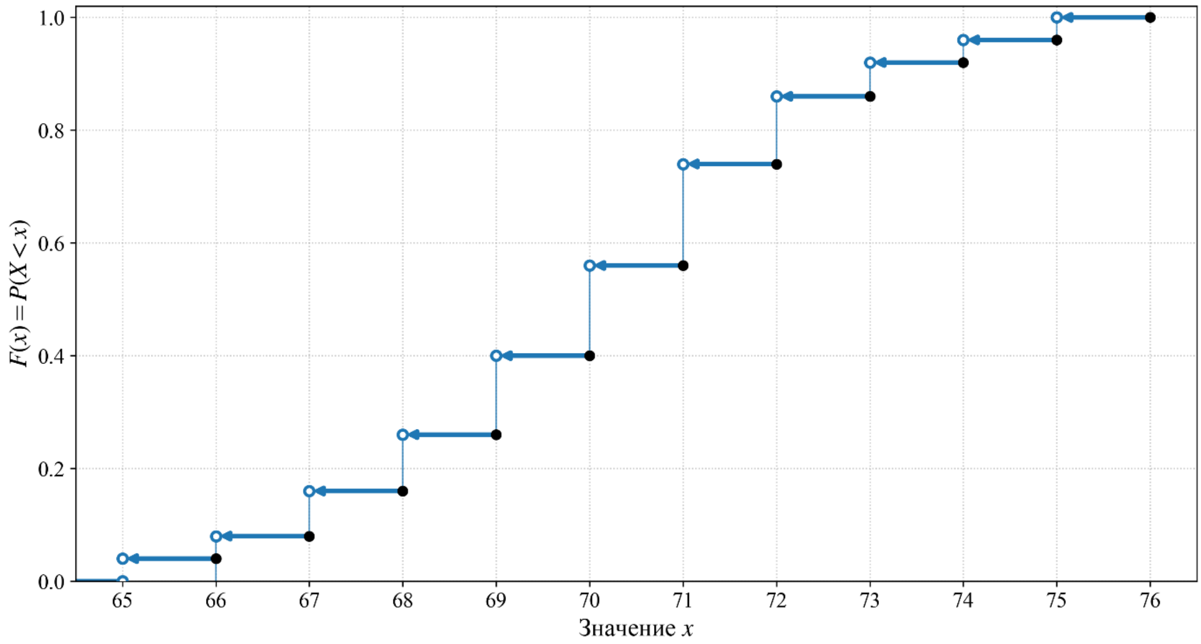


Рис. 2.2 График интегральной функции распределение частоты пульса.

График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид с разрывами первого рода. В каждой точке x_i,, соответствующей возможному значению величины, функция совершает скачок, величина которого равна вероятности $p_i=P(X=x_i)$. Причем при подходе слева к точкам разрыва функция сохраняет свое значение. На графике это отмечено черной точкой. Сумма высот всех скачков функции F(x) равна 1, что отражает условие нормировки вероятностей.

Свойства функции распределения:

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси, и для любых α < β выполняется равенство:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

3. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице, т.е.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

При увеличении числа наблюдений ($n \to \infty$) и уменьшении ширины интервалов группировки данных ступенчатый график эмпирической функции распределения дискретной величины приближается к плавной кривой. Этот предельный переход демонстрирует общность понятия функции распределения, применимого к случайным величинам любого типа - как дискретным, так и непрерывным.

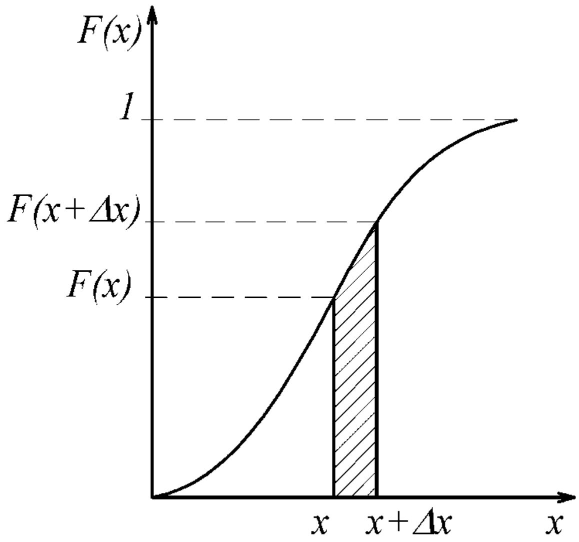


Рис 2.3 Функция распределения непрерывной случайной величины

- Для *дискретной* величины *F(x)* – ступенчатая функция (скачки в точках x_i на высоту p_i).
- Для *непрерывной* величины *F(x)* - плавная, непрерывная функция.

2.4. Плотность распределения вероятности

Для непрерывных случайных величин, наряду с интегральной функцией распределения, используют *дифференциальную функцию распределения f(x) (плотность распределения вероятности* или *плотность вероятности)*:

$$f(x) = F'(x)$$

Основные свойства дифференциальной функции распределения.

1. Для любых x дифференциальная функция распределения неотрицательна

$$f(x) \geq 0.$$

2. Условие нормировки для дифференциальной функции распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

3. Для дифференциальной функции распределения имеет место равенство:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Таким образом зная $f(x)$ можно вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу (a, b):

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Геометрически, эта вероятность равна площади под кривой $f(x)$ в интервале между a и b.

Пример 2.3. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1 \\ \frac{(x-1)}{2} & \text{при } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x < 3 \end{cases}$$

Вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервалы (1; 2) и (3; 4).

Решение. $P_1 = F(2) - F(1) = \frac{2-1}{2} - \frac{1-1}{2} = 0{,}5$

$$P_2 = F(4) - F(3) = 1 - \frac{3-1}{2} = 1 - 1 = 0$$

Пример 2.4. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \ \ x < 2 \\ (x-2)^2 & при \ \ 2 \le x \le 3 \\ 1 & при \ \ x > 3 \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины.

Решение. Согласно определению плотности распределения как первой производной функции распределения, имеем:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & при \ x < 2 \\ 2(x-2) & при \ 2 \le x \le 3 \\ 0 & при \ x > 3 \end{cases}$$

2.5. Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако на практике часто достаточно нескольких количественных показателей, которые в сжатом виде отражают самые важные свойства этой величины. Эти числа называются числовыми характеристиками случайной величины.

Основные числовые характеристики:

- **Математическое ожидание** - мера положения центра распределения случайных величин. Математическое ожидание характеризует *среднее теоретическое значение* случайной величины. В медицине это может среднее значение признака в популяции (например, средний уровень холестерина).

- **Дисперсия** и **среднее квадратическое отклонение** - показывают, насколько сильно значения разбросаны или рассеяны вокруг этого среднего.

Таким образом, вместо полной таблицы или сложной формулы закона распределения, эти три характеристики позволяют быстро оценить, где в среднем находится величина и насколько она изменчива.

Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений всех возможных ее значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \qquad (2.1)$$

Для непрерывных случайных величин с плотностью распределения $f(x)$ математическое ожидание равно определенному интегралу:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx \qquad (2.2)$$

где a и b пределы интегрирования, которые соответствуют крайним границам возможных значений X.

В общем случае

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \qquad (2.3)$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины, задаваемое интегралом (2.2), представляет собой непрерывный аналог формулы (2.1). Этот переход осуществляется путём замены дискретных значений x_i непрерывной переменной x, вероятностей p_i на элемент $f(x)$, конечной суммы на интеграл.

Таким образом, математическое ожидание можно интерпретировать как средневзвешенное значение случайной величины, где «весом» для каждого возможного значения служит плотность вероятности в этой точке. На рис. 2.4 показано, как изменение математического ожидания сдвигает всю кривую распределения вдоль числовой оси, не меняя её формы.

Математическое ожидание является центром распределения вероятностей случайной величины X. На рис.2.4 приведены графики распределения случайной величины, описанные одинаковым законом, но имеющие различные значения математического ожидания.

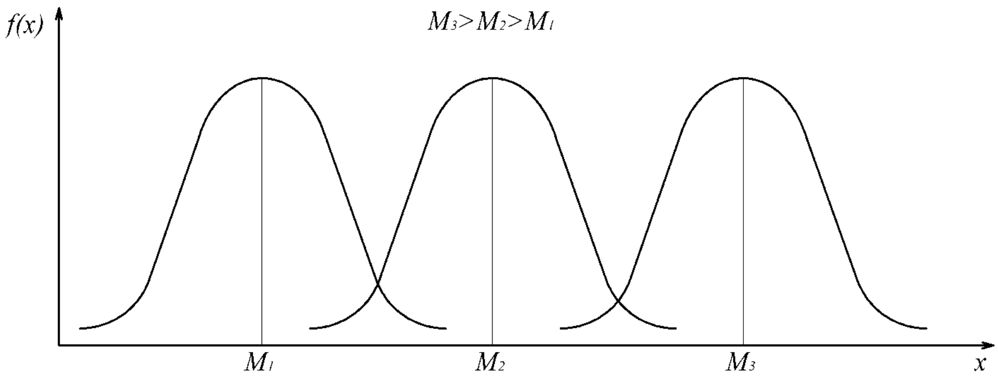


Рис. 2.4 Сдвиг кривой распределения при изменении математического ожидания.

Пример 2.5. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, зная закон ее распределения.

X	-1	0	1	2	3
p	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

Решение. По формуле (2.1) находим:

$M(X) = -1 \cdot 0{,}05 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}05 = 1{,}1$

Пример 2.6. Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины X, зная закон ее распределения.

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x<0;\\ x & при\ \ 0\le x<1\\ -x+2 & при\ \ 1\le x<2;\\ 0 & при\ \ x\ge 2.\end{cases}$$

Решение. По формуле 2.2 находим:

$$M(x)=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+x^2\Bigg|_1^2-\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2=1$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M(C) = C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы (разности) случайных величин равно алгебраической сумме (разности) их математических ожиданий:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

Свойство справедливо для любого числа слагаемых.

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее собственного математического ожидания всегда равно нулю:

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Другие характеристики положения (центра распределения)

Медиана (Ме)

Медиана - это такое значение случайной величины, которое делит площадь под кривой плотности распределения (или суммарную вероятность) пополам (рис. 2.5). То есть, вероятность того, что величина примет значение меньше медианы, равна вероятности, что она примет значение больше медианы:

$$P(X<Me)=P(X>Me)=0.5.$$

Важное свойство: Медиана менее чувствительна к выбросам и крайним значениям, чем математическое ожидание.

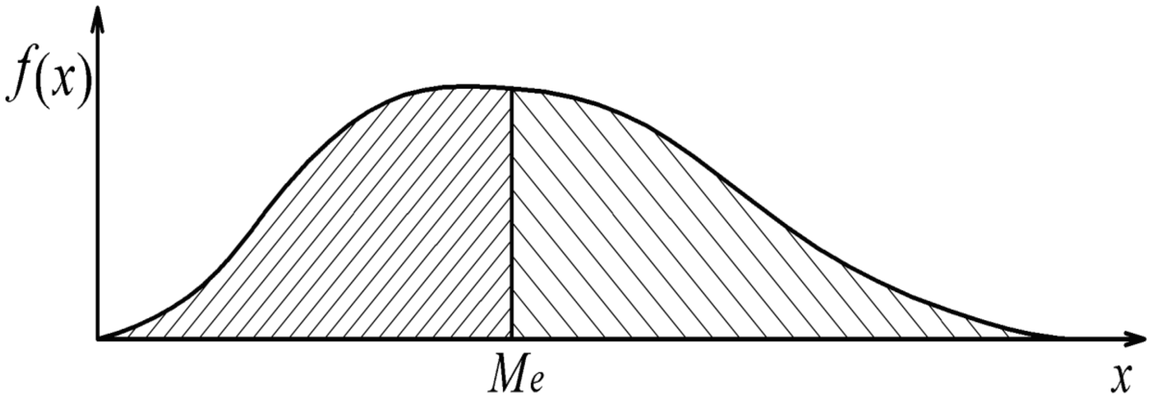


Рис. 2.5 Определение медианы случайной величины

Мода (Мо)

Мода - это значение случайной величины, соответствующее максимуму её плотности распределения (для непрерывной величины) или наибольшей вероятности (для дискретной). Однако это определение подходит только для одномодальных распределений, В общем случае мода – это такое значение случайной величины, что предшествующие и последующие за ними значения имеют меньшие вероятности.

- Одномодальное (унимодальное) распределение имеет одну моду (один пик).
- Бимодальное и мультимодальное распределения имеют две или несколько мод соответственно (рис. 2.6). В общем случае мода - это локальный максимум плотности распределения.

Для симметричного унимодального (одновершинного) распределения все три характеристики центра совпадают:

$$M(X)=Me=Mo.$$

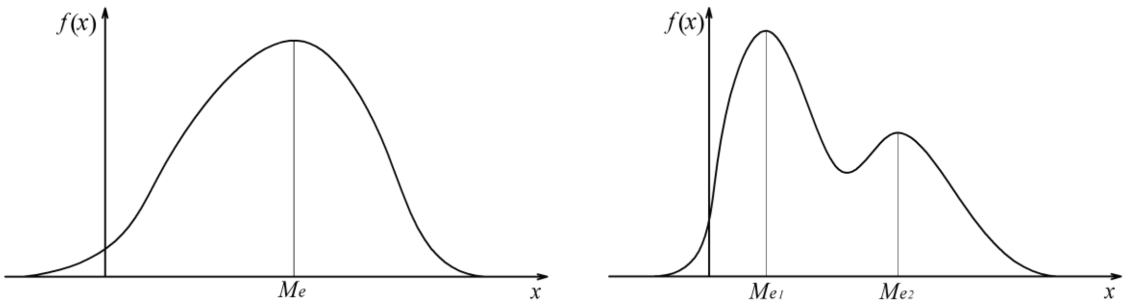


Рис 2.6 Одномодальное и бимодальное распределение случайной величины

Дисперсия количественно характеризует разброс или рассеяние значений случайной величины вокруг ее среднего значения (математического ожидания).

Дисперсией *D*(*X*) случайной величины X называется математическое ожидание квадрата её отклонения от собственного математического ожидания $M(X)$:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \qquad (2.4)$$

Для дискретных случайных величин эту формулу можно записать в следующем виде:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 p_i \qquad (2.5)$$

Для непрерывных случайных величин с плотностью вероятности $f(x)$:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx \qquad (2.6)$$

На рис. 2.7 представлены графики плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ двух случайных величин с одинаковыми математическими ожиданиями, но разными дисперсиями. Как видно из графика, кривая с меньшей дисперсией $f_1(x)$ является более узкой и высокой - значения величины сильнее сконцентрированы около среднего. Кривая с большей дисперсией $f_2(x)$ - более широкая и пологая, что свидетельствует о большем разбросе возможных значений.

Важное условие: Оба распределения удовлетворяют условию нормировки - площадь под каждой кривой плотности вероятности равна единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)dx = 1$$

Это означает, что увеличение «размаха» кривой (большая дисперсия) всегда компенсируется уменьшением её «высоты», чтобы общая вероятность оставалась равной 1.

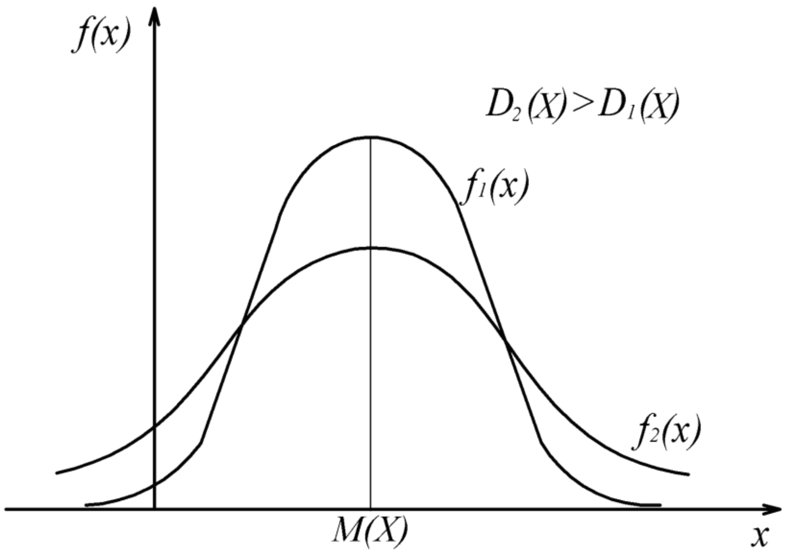


Рис. 2.7. Графики плотности распределения случайных величин с одинаковыми значениями математического ожидания и различными дисперсиями

Дисперсия $D(X)$, будучи математическим ожиданием квадрата отклонения $[X-M(X)]^2$, имеет квадрат единиц измерения исходной случайной величины. Если X измеряется в метрах**,** то отклонение $X-M(X)$ также измеряется в метрах (м). Квадрат отклонения $(X-M(X))^2$ будет иметь размерность м²**.** Следовательно, дисперсия $D(X)$ также будет выражена в квадратных метрах. Это создаёт смысловую проблему**:** интерпретировать «разброс в квадратных метрах» при измерении, например, роста человека неестественно и неудобно. Для возвращения к исходной размерности из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученная величина называется средним квадратическим отклонением или стандартным отклонением:

$$\sigma(X)\ (\textit{сигма от } X) = \sqrt{D(X)} \qquad (2.7)$$

В нашем примере $\sigma(X)$ будет измеряться в метрах**,** что совпадает с размерностью исходной величины X.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ является наиболее употребимой мерой разброса**.** Оно характеризует типичный размах отклонений значений случайной величины от её среднего значения $M(X)$. На практике, для широкого класса распределений (особенно близких к нормальному) большинство значений величины X лежит в интервале:

$$[M(X)-\sigma(X),\ M(X)+\sigma(X)].$$

Чем больше $\sigma(X)$, тем шире этот интервал и тем сильнее разбросаны значения относительно среднего. И наоборот, малое $\sigma(X)$ указывает на высокую концентрацию данных около математического ожидания.

Пример 2.7. *Закон распределения дискретной случайной величины X задан следующей таблицей:*

X	*1*	*2*	*4*	*5*
P	*0.1*	*0.4*	*0.4*	*0.1*

Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение: По формуле 2.1:

$$M(X)=1\cdot 0.1 + 2\cdot 0.4 + 4\cdot 0.4 + 5\cdot 0.1 = 3$$

По формуле 2.5:

$$D(X)=(1-3)^2\cdot 0.1 + (2 - 3)^2\cdot 0.4 + (4 - 3)^2\cdot 0.4 + (5 - 3)^2\cdot 0.1 =1.6$$

По формуле 2.6:

$$\sigma(X)=\sqrt{1.6} = 1.26$$

Основные свойства дисперсии:

1. Дисперсия алгебраической суммы (разности) двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин:
$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$
2. Дисперсия постоянной величины C равна нулю, т.к. она не имеет разброса:

$$D(C) = 0$$

3. Постоянный множитель C случайной величины X можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

4. Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания, т.е.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \qquad (2.8)$$

Эта формула часто удобнее для вычислений, чем прямое определение (2.5).

2.6. Нормальный закон распределения случайных величин

Нормальный закон распределения случайных величин является одним из важнейших в теории вероятностей и статистике. Его широкое применение теоретически обосновано центральной предельной теоремой. Согласно этой теореме, распределение среднего n независимых случайных величин, распределенных по любому закону, при увеличении числа наблюдений в выборке, приближается к нормальному. Это объясняет, почему многие природные и социальные явления (формируемые множеством случайных факторов) описываются нормальным законом. Однако, в тех случаях, когда доминирует один-два фактора, существенно превосходящих остальные, нормальное распределение неприменимо. В таких случаях выбор закона распределения требует отдельного теоретического или эмпирического обоснования.

Непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение* с параметрами a (математическое ожидание) и σ^2 (дисперсия), если ее плотность вероятности задается функцией Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a $=M(X)$ – параметр положения (центр симметрии), $\sigma = \sqrt{D(X)}$ - параметр рассеяния. Кривая нормального закона распределения имеет характерную колоколообразную форму, симметричную относительно вертикальной прямой $x=a$ (рис. 2.8).

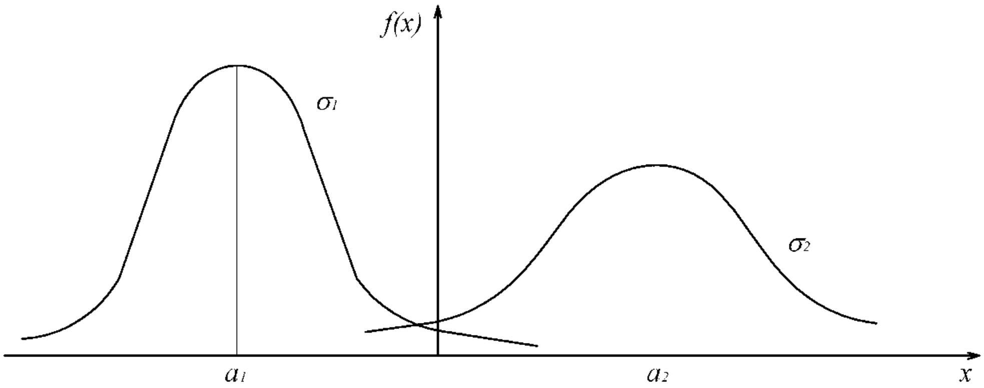


Рис. 2.8 Графики плотностей нормального распределения с разными a и σ

Основные свойства функции распределения:

1. Областью определения функции $f(x)$ является вся числовая ось.
2. Функция $f(x)$ может принимать только положительные значения:

$$f(x)>0.$$

3. Предел функции $f(x)$ при неограниченном возрастании $|x|$ равен нулю, т.е. ось $0x$ является горизонтальной асимптотой графика функции.
4. Функция $f(x)$ достигает максимума в точке $x = a$:

$$f_{max}=f(a)= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

5. График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$.
6. Кривая нормального распределения имеет точки перегиба при $x = a \pm \sigma$.
7. Площадь под кривой нормального закона распределения всегда одинакова и равна единице.

Для нормально распределённой величины X с параметрами a и σ справедливо эмпирическое правило «трех сигм» (рис. 2.9):

- В интервал $a \pm \sigma$ попадает около 68.3% всех значений случайной величины.
- В интервал $a \pm 2\sigma$ попадает около 95.5% всех значений.
- В интервал $a \pm 3\sigma$ попадает около 99.7% всех значений.

Вероятность выхода за эти пределы пренебрежимо мала (≈0.3%).

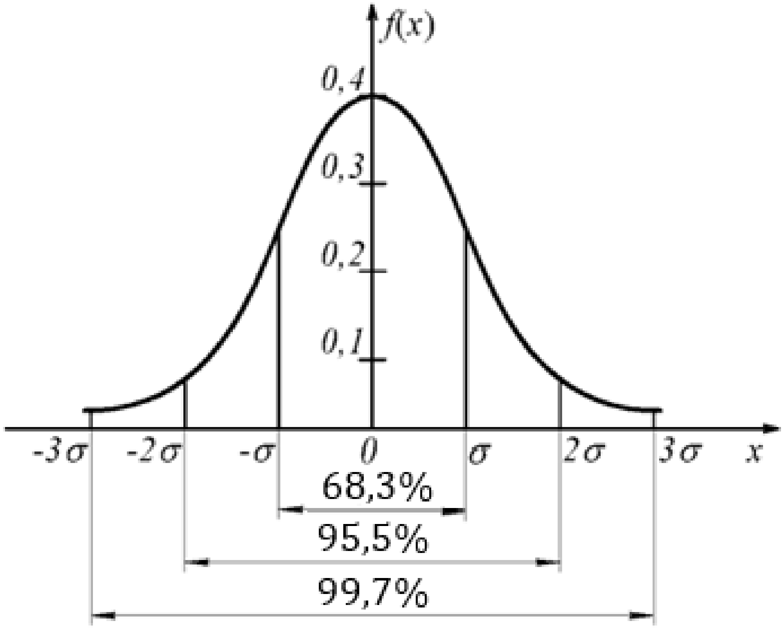


Рис. 2.9 Распределение площадей под кривой плотности стандартного нормального распределения

Правило «трех сигм»:

Если случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами а и σ^2*, то ее значения практически не выходят за границы интервала* $(\alpha - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

Тестовый контроль

2.1. Вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньше фиксированного действительного числа x, т. е. $F(x) = P(X < x)$ называется

А) интегральной функцией распределения

B) статистической вероятностью

C) средним квадратическим отклонением

D) оценкой генеральной дисперсии

2.2. Варианта, относительно которой вариационный ряд делится на две равные по объему части, называется

A) мода

B) среднее выборочное

C) медиана

D) дисперсия

2.3. Из перечисленного характеристикой положения является

A) дисперсия

B) среднее выборочное

C) среднее квадратическое отклонение

D) интервал варьирования

2.4. Сумма произведений случайных величин на вероятность их появления называется

A) относительной частотой

B) дисперсией

C) математическим ожиданием

D) средним квадратичным отклонением

2.5. Статистическое распределение – это совокупность

A) вариант

B) относительных частот

C) вариант и соответствующих им частот

D) данных и закон их распределения

2.6. Наиболее часто встречающаяся варианта в данной совокупности

A) мода

B) среднее выборочное

C) медиана

D) дисперсия

2.7. Разность между наибольшим и наименьшим значениями признака, называется

A) мода

B) среднее квадратическое отклонение

C) коэффициент вариации

D) вариационный размах

2.8. Совокупность вариант, расположенных в порядке возрастания, и соответствующих им частот, называется

A) математическое ожидание

B) выборка

C) вариационный ряд

D) гистограмма

2.9. Из перечисленного характеристикой положения не является

A) мода

B) среднее выборочное

C) дисперсия

D) медиана

2.10. Дискретной случайной величиной не является

A) число студентов в аудитории

B) рост студента

C) число очков, выпавших на игральной кости

D) число шаров, которое можно достать из урны

2.11. Дискретной случайной величиной является

A) число студентов в аудитории

B) рост студента

C) масса пациента

D) уровень гемоглобина в крови

2.12. Дискретные случайные величины принимают

A) значение интегральной суммы

B) заранее известные значения

C) счетное число значений

D) значения внутри интервала

2.13. Дисперсия случайной величины

A) всегда принимает положительные значения

B) всегда принимает отрицательные значения

C) равна нулю

D) может быть как положительной, так и отрицательной

2.14. Дисперсия случайной величины характеризует

A) математическое ожидание

B) среднее значение

C) наиболее вероятное значение

D) рассеяние случайных величин

2.15. Дифференциальная функция распределения вероятностей f (x) существует для

A) дискретных случайных величин

B) непрерывных случайных величин

C) любых случайных величин

D) только для случайных событий

2.16 Закон распределения случайной величины нельзя задать

A) графиком

B) формулой

C) таблицей

D) дисперсией

2.17. Интегральная функция распределения вероятностей F(X) существует для

A) дискретных случайных величин

B) непрерывных случайных величин

C) любых случайных величин

D) только для случайных событий

2.18. Математическое ожидание случайной величины

A) всегда принимает положительные значения

B) всегда принимает отрицательные значения

C) всегда равно нулю

D) может принимать разные значения

2.19. Математическое ожидание случайной величины характеризует её

A) закон распределения

B) среднее значение

C) дисперсию

D) рассеяние

2.20. Непрерывной случайной величиной является

A) число студентов в аудитории

B) значение артериального давления

C) число очков, выпавших на игральной кости

D) число шаров, которое можно достать из урны

2.21. Непрерывные случайные величины принимают

A) значение интегральной суммы

B) заранее известные значения

C) счетное число значений

D) значения внутри интервала

2.22. Нормальный закон распределения – это закон

A) больших чисел

B) Максвелла

C) Гаусса

D) Пуассона

2.23. Случайная величина измеряется в кг. Математическое ожидание имеет единицы измерения

A) кг

B) $кг^2$

C) $кг^{-1}$

D) невозможно указать единицы измерения

2.24. Случайная величина измеряется в метрах. Дисперсия имеет единицы измерения

A) м

B) $м^2$

C) $м^{-1}$

D) невозможно указать единицы измерения

2.25. Случайная величина измеряется в метрах. Среднее квадратическое отклонение имеет единицы измерения

A) м

B) $м^2$

C) $м^{-1}$

D) невозможно указать единицы измерения

2.26. Числовой характеристикой случайной величины не является

A) закон распределения

B) математическое ожидание

C) дисперсия

D) среднее квадратическое отклонение

2.27. Кривая Гаусса, описывающая нормальный закон распределения случайных величин, симметрична относительно

A) X=M (где M - математическое ожидание)

B) X=D (где D - дисперсия)

C) X=0

D) X=1

2.28. Площадь под кривой нормального закона распределения

A) всегда равна 100

B) зависит от дисперсии

C) всегда равна 1

D) принимает любое положительное значение

2.29. Распределение случайных величин описывается нормальным законом (M – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение). Практически все значения случайной величины лежат в интервале

A) $M-\sigma < X < M+\sigma$

B) $M < X < 3\sigma$

C) $0 < X < M+3\sigma$

D) $M-3\sigma < X < M+3\sigma$

2.30. График функции нормального закона распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a – математическое ожидание случайной величины, σ^2 – дисперсия, σ – среднее квадратическое отклонение симметричен относительно прямой

A) $x = \sigma^2$

B) $x = \sigma$

C) $a = \sigma$

D) $x = a$

2.31. Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, называется

A) медианой

B) квадратическим отклонением

C) законом распределения

D) дисперсией

УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ

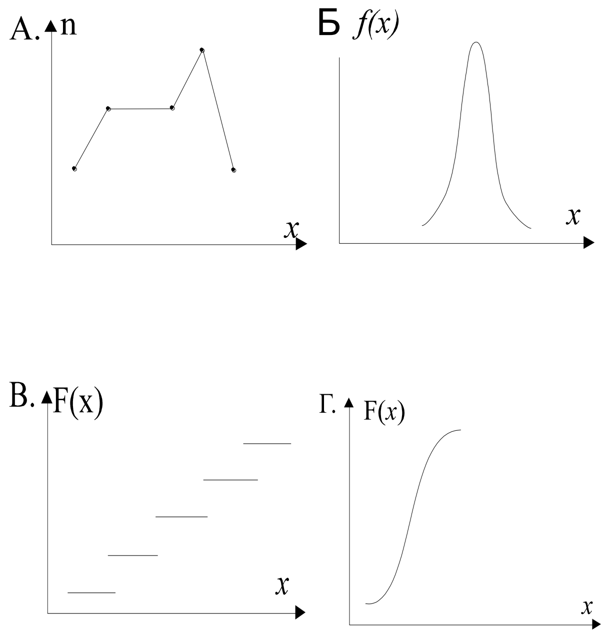
2.32. Установите соответствие между названиями функций и их графиками

НАЗВАНИЕ **ГРАФИКИ**

1) Интегральная функция распределения для дискретной случайной величины.

2) Интегральная функция распределения для непрерывной случайной величины.

3) Дифференциальная функция распределения.



2.33. 1) Установите соответствие между графиками и параметрами закона нормального распределения, где μ - математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

ПАРАМЕТРЫ **ГРАФИКИ**

А) $\mu_1 = \mu_2$

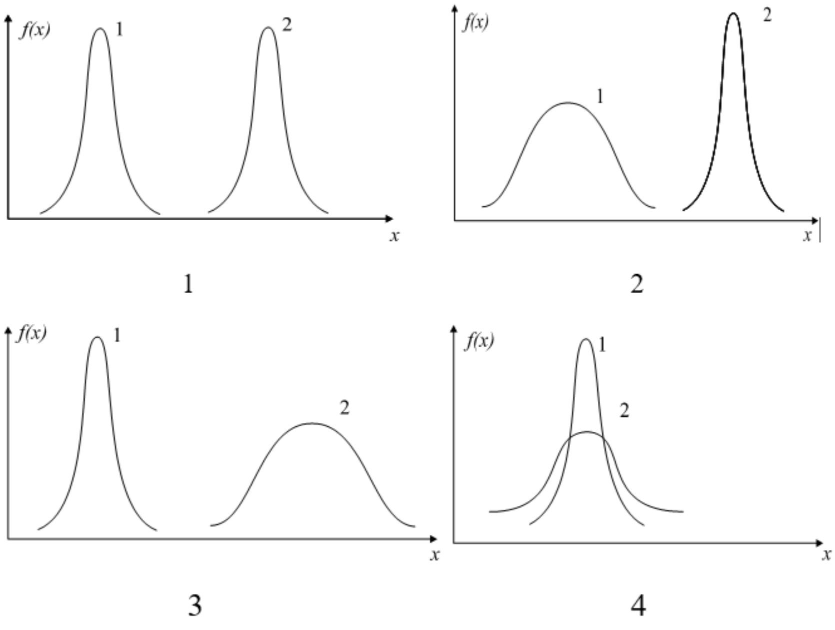
Б) $\mu_1 > \mu_2$

В) $\mu_1 < \mu_2$

Г) $\sigma_1 < \sigma_2$

Д) $\sigma_1 = \sigma_2$

Е) $\sigma_2 < \sigma_1$



2) Изобразите схематически графики двух функций нормального закона распределения: а) $\mu_A < \mu_B$, $\sigma_A < \sigma_B$; б) $\mu_A > \mu_B$, $\sigma_A < \sigma_B$; в) $\mu_A < \mu_B$, $\sigma_A = \sigma_B$; г) $\mu_A = \mu_B$, $\sigma_A < \sigma_B$; д) $\mu_A > \mu_B$, $\sigma_A > \sigma_B$; е) $\mu_A = \mu_B$, $\sigma_A = \sigma_B$;

В заданиях 2.34 – 2.50 в таблице представлен закон распределения дискретной случайной величины. Вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Ответы округлите до сотых.

2.34.

X_i	7	8	9	10
P_i	0,2	0,15	0,1	0,55

2.35

X_i	2	3	4	5
P_i	0,25	0,15	0,5	0,1

2.36.

X_i	28	30	32	34
P_i	0,2	0,15	0,1	0,55

2.37.

X_i	21	22	23	24
P_i	0,2	0,15	0,1	0,55

2.38.

X_i	10	20	30	40
P_i	0,2	0,2	0,2	0,4

2.39.

X_i	10	13	16	19

P_i	0, 2	0, 15	0, 1	0,55

2.40**.**

X_i	10	20	30	40
P_i	0,4	0,2	0,2	0,2

2.41.

X_i	3	4	5	6
P_i	0,5	0,1	0,3	0,1

2.42**.**

X_i	20	30	40	50
P_i	0,2	0,15	0,1	0,55

2.43**.**

X_i	4	5	6	7
P_i	0,5	0,1	0,3	0,1

2.44**.**

$\mathbf{X_i}$	2	3	4	7
$\mathbf{P_i}$	0,1	0,3	0,1	0,5

2.45.

$\mathbf{X_i}$	2	3	4	5
$\mathbf{P_i}$	0,2	0,15	0,1	0,55

2.46.

$\mathbf{X_i}$	0	2	4	6
$\mathbf{P_i}$	0,2	0,15	0,1	0,55

2.47.

X_i	10	20	30	40
P_i	0,4	0,1	0,2	0,3

2.48.

X_i	5	7	9	11
P_i	0,2	0,15	0,1	0,55

2.49.

X_i	10	20	30
P_i	0, 5	0, 3	0, 2

2.50.

X_i	-10	0	10	20
P_i	0,2	0,2	0,2	0,4

3. Основы математической статистики

Математическая статистика - раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и анализа данных массовых случайных явлений для выявления статистических закономерностей.

В отличие от теории вероятностей, где законы распределения считаются известными, в математической статистике они **неизвестны** и подлежат оценке на основе ограниченного числа наблюдений (экспериментальных данных). Всякий эксперимент связан с ошибками измерений, что приводят к приближённости оценок. Кроме того, ограниченность выборки влияет на точность выводов.

Основные задачи математической статистики:

- **Статистическое оценивание:** Определение приближённых значений (оценок) параметров генеральной совокупности (например, среднего, дисперсии) по выборочным данным.
- **Проверка статистических гипотез:** Проверка предположений о законах распределения, равенстве параметров и т.д.

3.1. Генеральная совокупность и выборка

Статистика изучает не отдельные случаи, а группы объектов (совокупности), объединённых общими признаками. Такая совокупность состоит из относительно однородных, но всё же различных элементов.

Полное обследование всей совокупности (генеральной) часто невозможно. Поэтому на практике исследуют её часть (выборку), свойства которой затем экстраполируют на всю совокупность. Этот подход, называемый **выборочным методом**, составляет основу прикладной статистики.

Генеральной называется совокупность всех мыслимых наблюдений или объектов исследования, обладающих изучаемым признаком.

Выборка (выборочная совокупность) – часть генеральной совокупности, непосредственно подвергнутая исследованию.

Например, при испытании нового антигипертензивного препарата, все взрослые пациенты (18–65 лет) с диагнозом «артериальная гипертензия I стадии» представляют собой генеральную совокупность. Выборка – это 200 пациентов с данным диагнозом, случайным образом отобранные из картотек городских клинических больниц для участия в клиническом исследовании.

Способность выборки правильно отражать свойства генеральной совокупности называется *репрезентативностью.* Обеспечить репрезентативность выборки - основная задача при планировании исследования.

Способы обеспечения репрезентативности выборки:

1. Случайный отбор (рандомизация) - главный принцип. Основные виды случайного отбора:
   - Простая случайная выборка: Каждый объект выбирается с равной вероятностью (например, жеребьёвка, генератор случайных чисел).
   - Механическая (систематическая) выборка. Отбирается каждый *k*-й элемент из списка (например, каждый 10-й пациент).
   - Стратифицированная выборка: Генеральная совокупность делится на однородные группы (страты) (например, по возрасту, полу, региону), и из каждой страты отбирается пропорциональное число объектов.
   - Кластерная выборка: Совокупность делится на кластеры (например, школы, больницы, деревни), случайно выбираются несколько кластеров, и обследуются все объекты в них.

2. Достаточный объём выборки. Маленькая выборка может случайно исказить истинные пропорции (высокая дисперсия оценок). Объём должен быть рассчитан заранее на основе желаемой точности.

3. Минимизация систематических ошибок. Репрезентативность нарушается не только малым размером выборки, но и ошибками отбора.

5. Пилотное исследование и проверка качества выборки.

3.2. Статистическое распределение. Гистограмма. Полигон

В результате эксперимента исследователь получает набор числовых данных x_1, x_2, …, x_n, каждый из которых представляет собой результат измерения определённого признака у объекта наблюдения. Задача статистического анализа состоит в том, чтобы по имеющимся экспериментальным данным описать свойства исследуемой генеральной совокупности.

Если полученные данные расположить в порядке убывания или возрастания числовых значений изучаемого признака, то полученная последовательность будет называться *вариационным рядом.*

Часто в данных встречаются повторяющиеся значения. В этом случае вариационный ряд удобно представлять в табличной форме, которая называется статистическим распределением выборки. В таблице указываются:

- Варианты ($\boldsymbol{x_i}$) - значения признака, встречающиеся в выборке.
- Частоты ($\boldsymbol{m_i}$) или относительные частоты ($\boldsymbol{f_i=m_i/n}$) или доля случаев, когда каждое значение встретилось.

Таким образом, статистическое распределение — это сводная таблица, показывающая, как часто встречается каждое из возможных значений признака в данной выборке.

Пример 3.1. Ежедневное количество студентов, посещающих методический кабинет, на протяжении ряда дней, следующее:

15, 17, 16, 18, 20, 21, 18, 17, 20, 15, 18, 17, 16, 19, 17, 16, 18, 19, 18, 19.

Составить статистическое распределение выборки.

Решение. В первой строке таблицы укажем встречающиеся значения посещений, во второй, количество таких значений и, наконец, в третьей относительную частоту этих значений.

Объем выборки n равен 20

Значения признака x_i	15	16	17	18	19	20	21
Частота встречаемости m_i	2	3	4	5	3	2	1

Относительная частота $f_i = m_i/n$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,15	0,1	0,05

Для графического изображения статистического распределения строят полигоны частот или гистограммы.

Гистограмма - это ступенчатая фигур, где по оси абсцисс отложены интервалы (классы), а по оси ординат - их частоты (рис. 3.1).

Для построения гистограммы весь диапазон измеряемой величины (от минимального до максимального) разбивается на равные интервалы, называемые классами. Ширину интервала можно определить по формуле Стерджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}32 \lg n};$$

где h - ширина интервала, $x_{\max}$ - максимальное, и $x_{\min}$ - минимальное значение выборочной величины, n - количество выборочных данных. Зная ширину интервала, определяют количество интервалов. Однако эта формула носит теоретический характер и на практике количество интервалов выбирают в пределах 7 – 12. После выбора количества интервалов устанавливают границы классов (C_i) и срединные значения классов ($\bar{C}_i$), где

$\bar{C}_i = \frac{C_i + C_{i+1}}{2}$ — середина i-го класса, i = 1,2, ..., k - количество классов.

Затем определяют m_i - количество значений выборочных данных, которые попадают в тот или иной класс. После просмотра всех выборочных данных по значениям m_i строят гистограмму. По этой гистограмме можно построить нормированную гистограмму, в которой каждое значение m_i заменяется на $f_i = \frac{m_i}{n}$.

Получение нормированных гистограмм позволяет сравнивать гистограммы, построенные на одних и тех же границах классов, но имеющих различный объем выборки.

Пример 3.2 Построить гистограмму для примера 3.1.

Решение.

Интер-вал	14,5-15,5	15,5-16,5	16,5-17,5	17,5-18,5	18,5-19,5	19,5-20,5	20,5-21,5
m_i	2	3	4	5	3	2	1
f_i	0,1	0,15	0,2	0,25	0,15	0,1	0,05

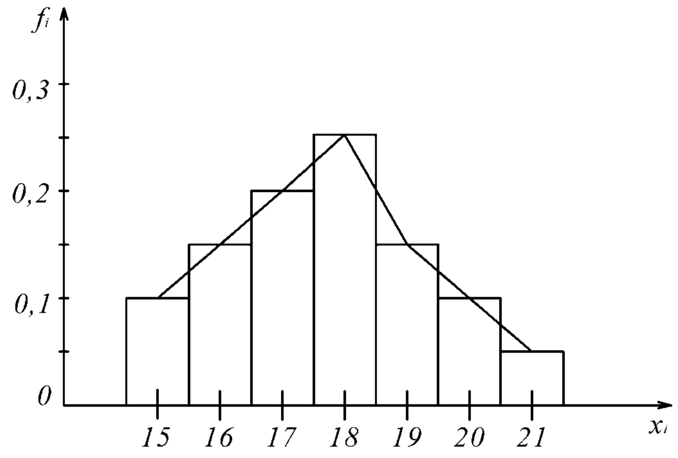


Рис. 3.1

Полигон частот – это ломаная линия, соединяющая точки с координатами (x_i, f_i), где x_i - значение варианты, f_i – относительная частота встречаемости.

Полигон частот можно получить из гистограммы путем соединения срединных значений классов (рис 3.1). График полигона частот (или относительных частот) легко построить и по статистическому распределению.

При неограниченном увеличении числа наблюдений и увеличении количества классов, ширина прямоугольников гистограммы будет уменьшаться, и середины верхних концов прямоугольников сольются в одну сплошную плавную линию, которая в пределе станет графиком плотности вероятности, характеризующим распределение генеральной совокупности.

Построение полигонов и гистограмм позволяет произвести первичный анализ экспериментальных данных, а именно: по форме гистограммы сделать предположение о законе распределения случайной величины; выявить наиболее часто встречающиеся значения исследуемой величины и разброс или отклонение относительно этого значения.

3.3. Характеристики положения и рассеяния статистического распределения

В разделе 2 были рассмотрены числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Аналогичные числовые характеристики вводятся и для выборочных данных. Выборочные аналоги можно определить как из результатов наблюдения, представленных в виде последовательности x_1, x_2, …, x_n, так и предварительно сгруппированых в виде статистического распределения или гистограммы.

Аналогом основной характеристики положения математического ожидания случайной величины является выборочное среднее:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3.1)$$

Кроме математического ожидания, параметрами, характеризующими центр статистического распределения, является медиана и мода

Медиана (*Me*) - структурная средняя, относительно которой вариационный ряд делится на две равные части: по обе стороны от *Me* располагается одинаковое число вариант.

Пример 3.3 Дан вариационный ряд 5, 7, 8, 10, 12, 14, 18. Найти медиану.

Решение. Медианой этого ряда будет центральная варианта, т.е. *Me* = 10, по обе стороны от нее находится по три варианты.

Мода (M_0) – это такое значение случайной величины, что предшествующие и следующее за ним значения имеют меньшие частоты встречаемости.

Пример 3.4 Распределение случайных величин задано таблицей:

X	14	15	17	21	24	31	39
n	8	8	14	13	10	9	4

Найти моду этого распределения.

Решение. Варианта, имеющая наибольшую частоту встречаемости – это 17. Других вариант, чтобы предшествующие и следующие за ней значения случайных величин имели меньшие частоты, в распределении нет. Таким образом, распределение является одномодальным с модой равной 17.

Для характеристики рассеяния вариант относительно своего выборочного среднего вводят характеристику, *называемую выборочной* дисперсией, которая является аналогом дисперсии генеральной совокупности и равна:

$$S_в^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 \qquad (3.2)$$

Квадратный корень из выборочной дисперсии называется *выборочным среднеквадратическим отклонением*:

$$S_в = \sqrt{S_в^2}. \qquad (3.3)$$

Иногда, для сравнения вариабельности признаков, имеющих различную размерность, применяют безразмерный показатель, который называется коэффициент вариации. Этот показатель представляет процентное отношение среднего квадратического отклонения к выборочной средней:

$$C = \frac{S}{\bar{x}_в} \cdot 100\%$$

3.4. Оценка параметров генеральной совокупности по ее выборке

Параметры распределения в генеральной совокупности – это истинные, но неизвестные величины:

- $M(X) = \mu$ - истинное среднее (математическое ожидание).
- $\sigma^2(X)$ - истинная дисперсия (генеральной совокупности).
- $\sigma(X)$ - истинное среднее квадратическое отклонение.

Поскольку мы не можем изучить всю генеральную совокупность, мы работаем с выборкой. Рассчитанные по ней величины являются оценками (приближениями) этих истинных параметров:

- Выборочное среднее $\bar{x}_в$ - оценка для математического ожидания μ.
- Выборочная дисперсия $S_в^2$ – оценка для генеральной дисперсии σ^2.
- Выборочное стандартное отклонение S - оценка для генерального среднего квадратического отклонения σ.

Оценка параметра генеральной совокупности – это функция результатов наблюдения (числовая характеристика), вычисленная по выборочным данным с помощью определенной формулы, которая используется для приближенного определения неизвестного значения соответствующего параметра генеральной совокупности.

Оценки подразделяются на точечные и интервальные. Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Основными свойствами оценок являются свойства *несмещенности, эффективности* и *состоятельности.*

Точечную оценку θ^* параметра θ называют *несмещенной,* если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру θ, т.е. $M(\theta^*) = \theta$. Это означает отсутствие систематической ошибки. В среднем, по множеству выборок, оценка оказывается верной. Аналогия: если прицел винтовки не сбит, то попадания хорошего стрелка ложатся вокруг центра.

Несмещенную оценку θ^*, которая имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ, вычисленных по выборкам одного и того же объема называют *эффективной оценкой.* Она самая точная среди всех несмещенных. Аналогия: Попадания стрелка ложатся не только вокруг центра, но и тесной группой.

Состоятельность оценки - это свойство улучшаться с увеличением числа данных: чем больше объём выборки, тем оценка ближе к истинному значению генерального параметра. В аналогии со стрелком означает, что увеличение числа выстрелов должно приближать точку попадания к центру мишени.

Рассмотрим, какие выборочные характеристики лучше всего оценивают математическое ожидание и дисперсию.

Если из генеральной совокупности взять k независимых выборок одинакового объема, то вычисленные по этим данным выборочные средние $\bar{x}_{в1}; \bar{x}_{в2}; \ldots \bar{x}_{\underset{k}{в}}$ будут распределены по нормальному закону, а их математическое ожидание будет равно математическому ожиданию генеральной совокупности:

$$M(\bar{X}_в) = M(X)$$

Таким образом, выборочное среднее $\bar{x}_в$ является несмещенной оценкой математического ожидания генеральной совокупности. При увеличении объема выборки ($n \to \infty$) значение выборочного среднего стремится к параметру генеральной совокупности с вероятностью близкой к единице, т.е. данная оценка является *состоятельной*.

Таким образом, оценкой математического ожидания генеральной совокупности служит выборочная средняя:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3.4)$$

где x_i – значение выборочных данных, n – объем выборки.

Если данные представлены в виде статистического распределения, то:

$$\bar{x}_{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i \qquad (3.5)$$

где x_i – варианта выборки, m_i – абсолютная частота встречаемости варианты x_i, k – число различных вариант.

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле:

$$S_{в}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{в})^2 \quad \text{где } n - \text{ объем выборки}$$

Можно показать, что для k независимых и равных выборок, математическое ожидание их дисперсий отлично от дисперсии генеральной совокупности. Это обусловлено тем, что в формуле выборочной дисперсии используется выборочное среднее, а не истинное математическое ожидание, что немного занижает разброс.

$$M(S_{в}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2(X)$$

Данная оценка дисперсии является смещенной. Для получения несмещенной точечной оценки дисперсии генеральной совокупности вычисляют исправленную выборочную дисперсию по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 . \qquad (3.6)$$

Для вариационного ряда:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 m_i . \qquad (3.7)$$

Исправленная выборочная дисперсия будет являться несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

$$M(S^2) = \sigma^2(X)$$

Отметим, что поправка существенна при малых значениях объема выборки n. При $n > 50$ разница между S^2 и $S_в^2$ несущественна.

Оценки S^2 и $S_в^2$ являются состоятельными оценками $\sigma^2(X)$.

Выборочной оценкой среднего квадратического отклонения будет:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2}$$

С учетом полученной оценки генеральной дисперсии, выражение для дисперсии выборочного среднего значения:

$$D(\bar{x}_в) = \frac{S^2}{n}$$

Тогда оценка среднего квадратического отклонения выборочной средней или **ошибка выборочного среднего**:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Ошибка выборочного среднего – это мера точности оценки среднего значения. Она показывает, насколько случайно выборочное среднее может отклоняться от истинного среднего генеральной совокупности из-за вариабельности выборки. Чем больше объем выборки n, тем меньше ошибка, тем точнее оценка.

Таким образом, используя корректные формулы на основе выборки, можем получить несмещённые, эффективные и состоятельные оценки, параметров генеральной совокупности, позволяющие делать научно обоснованные выводы о всей генеральной совокупности.

Пример 3.5. Имеется выборка: 2, 4, 5, 3, 6, 4. Найти выборочное среднее, исправленную выборочную дисперсию и ошибку выборочного среднего.

Решение.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2+4+5+3+6+4}{6} = 4$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$
$$= \frac{(2-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2}{6-1} = 2$$

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \sqrt{\frac{2}{6}} = 0{,}58$$

Пример 3.6 Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	4	5	6	7
m_i	10	12	6	2

Найти оценки математического ожидания и дисперсии.

Решение.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \frac{4 \cdot 10 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 2}{30} = 5$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{x}_i - \bar{x})^2\, m_i = \frac{(4-5)^2 \cdot 10 + (5-5)^2 \cdot 12 + (6-5)^2 \cdot 2 + (7-5)^2 \cdot 2}{30-1}$$
$$= \frac{24}{29} \approx 0{,}83$$

Пример 3.7 Исследовался показатель скорости оседания эритроцитов в группе мужчин в возрасте от 40 до 50 лет через 7 дней после перенесенного заболевания ОРВИ. Результаты исследования (в мм/ч): 3, 4, 7, 9, 8, 4, 9, 6, 6, 8, 7, 8, 9, 7, 10, 12, 11, 8, 6, 6.

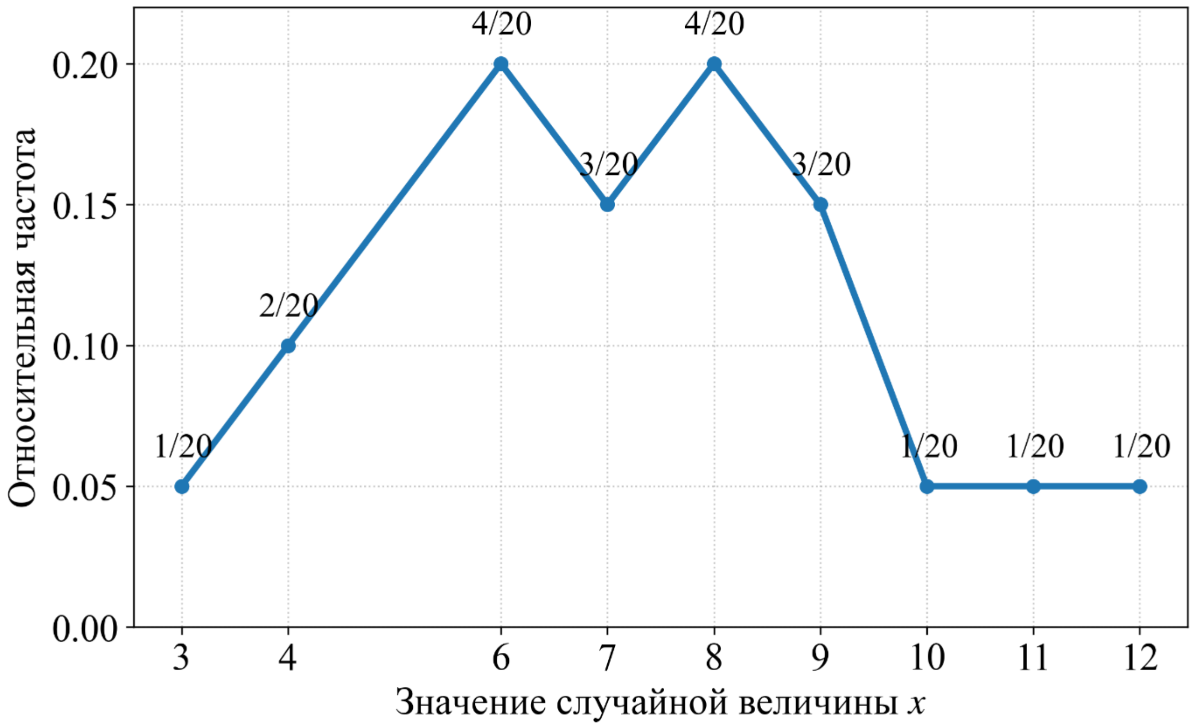
По выборочным данным составьте статистическое распределение, постройте полигон частот, вычислите выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение:

Статистическое распределение составим в виде таблицы, где первая строка - упорядоченные по возрастанию варианты, вторая строка - абсолютные частоты, третья – относительные частоты встречаемости, соответствующие варианте.

X	3	4	6	7	8	9	10	11	12
m	1	2	4	3	4	3	1	1	1
p	1/20	2/20	4/20	3/20	4/20	3/20	1/20	1/20	1/20

Объем выборки n =20. Полигон относительных частот – ломаная линия, соединяющая точки с координатами (x_ip$_i$).



$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \frac{3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 10 + 11 + 12}{20} = 7{,}4 \approx 7$$

$$S_{\text{в}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\text{x}_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot m_i$$

$$= \frac{1}{20}[(3-7)^2 + (4-7)^2 \cdot 2 + (6-7)^2 \cdot 4 + (7-7)^2 \cdot 3 + (8-7)^2 \cdot 4 + (9-7)^2 \cdot 3 + (10-7) + (11-7) + (12-7)] = 3{,}3$$

3.5. Интервальная оценка. Доверительный интервал и доверительная вероятность

В предыдущих разделах мы рассмотрели методы получения точечных оценок параметров генеральной совокупности, таких как выборочное среднее для математического ожидания или исправленная дисперсия для генеральной дисперсии. Эти оценки представляют собой конкретные числовые значения, вычисленные на основе данных выборки.

Однако важный вопрос остаётся без ответа: насколько можно доверять этой оценке? Точечное число само по себе не содержит информации о своей точности. Например, среднее артериальное давление 128 мм рт. ст., вычисленное по выборке из 10 пациентов, будет гораздо менее надёжным, чем такое же значение, полученное при обследовании 1000 пациентов.

Именно для решения этой проблемы - оценки точности и надёжности - в математической статистике применяется интервальное оценивание. Этот подход особенно важен при работе с малыми выборками ($n < 30$), когда точечная оценка может быть крайне неустойчивой и сильно меняться от одной выборки к другой.

Пусть θ - неизвестный параметр генеральной совокупности (например, математическое ожидание, дисперсия). *Доверительным интервалом* для параметра θ с вероятностью P, близкой к единице, называется интервал *(a, b)*, границы которого вычисляются по выборочным данным таким образом, что выполняется условие:

$$P(a < \theta < b) = P.$$

Интерпретация определения доверительного интервала основана на частотном подходе: если многократно (например, 1000 раз) повторять процесс извлечения выборки объёма n из одной и той же генеральной совокупности и для каждой выборки строить доверительный интервал по одному и тому же правилу, то примерно в Р $\times 100\%$ случаев построенные интервалы будут накрывать истинное значение параметра θ.

Вероятность Р называют *доверительной* (доверительным уровнем или коэффициентом доверия).

Уровнем значимости α называется вероятность того, что построенный доверительный интервал не накроет истинный параметр θ.

Между доверительной вероятностью и уровнем значимости существует прямая связь: $\alpha = 1 - \mathrm{P}$.

В прикладных исследованиях сложились стандартные значения:

$\alpha = 0.05$, Р = 0.95 - стандартный уровень в медицине и фармации.

$\alpha = 0.01$, Р = 0.99 - высокий уровень надёжности в медицине и фармации.

$\alpha = 0.001$, Р = 0.999 - очень высокий уровень надёжности (авиация, космонавтика).

Выбор уровня значимости — это всегда компромисс между надёжностью и точностью. Чем меньше α (чем больше Р), тем надёжнее наш вывод (меньше шансов ошибиться), но тем шире будет доверительный интервал, то есть менее точной будет оценка местоположения параметра θ.

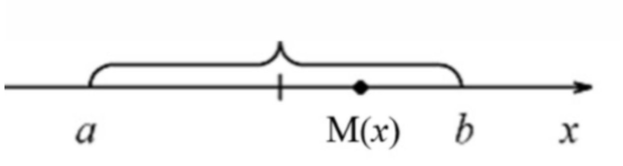


Рис. 3.2 Доверительный интервал для математического ожидания

Рассмотрим наиболее практически важный случай: оценивание математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности, когда её дисперсия неизвестна (что типично для реальных задач).

Исходные данные: Выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ объёма n. Из неё вычислены:

Точечная оценка для $M(X)$: выборочное среднее

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i$$

Точечная оценка для генеральной дисперсии: исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} (\text{x}_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot m_i$$

В этом случае в качестве точечной оценки для среднего квадратического отклонения среднего (стандартной ошибки среднего) используется величина: $m_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$. Формула для вычисления доверительного интервала принимает вид:

$$\bar{x}_в - m_{\bar{x}} \cdot t_{\alpha,f} \leq M(X) \leq \bar{x}_в + m_{\bar{x}} \cdot t_{\alpha,f},$$

или

$$\bar{x}_в - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha,f} \leq M(X) \leq \bar{x}_в + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha,f},$$

Доверительный интервал может быть также записан в виде:

$$\text{M(x)} = \bar{x}_в \pm \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha,f}$$

где $t_{\alpha,f}$ - величина нормированного отклонения, определяемая по таблицам распределения Стъюдента (см. Приложения табл. 1). Величина $t_{\alpha,f}$ определяется вероятностью попадания генерального параметра в указанный интервал и числом степеней свободы $f = n - 1$, где n - объем выборки.

Например, при $n = 30$, $f = 30 - 1 = 29$ для P = 0,95, $t_{0.05,29} = 2{,}05$; для P = 0,99, $t_{0.01,29} = 2{,}76$; для P = 0,999; $t_{0.001,29} = 3{,}66$.

Интервальное оценивание является мощным инструментом статистического вывода, позволяющим не только оценить значение неизвестного параметра, но и количественно выразить точность этой оценки. Доверительный интервал предоставляет диапазон правдоподобных значений, что гораздо информативнее для принятия решений, чем одна точечная оценка.

Пример 3.8. Для данных примера 3.5 найти доверительный интервал для математического ожидания с надежностью 0,95 (α=1-0,95=0,05)

Решение. $\bar{x}_{\text{в}} - m_{\bar{x}} \cdot t_{\alpha,f} \leq M(X) \leq \bar{x}_{\text{в}} + m_{\bar{x}} \cdot t_{\alpha,f}$.

Из решения примера 3.5, имеем: $\bar{x_в} = 4$; $m_{\bar{x}} = 0{,}58$; $f = n – 1 = 6 – 1 =$ 5.

В приложении 1 (табл. №1) найдем $t_{0,05;5} = 2{,}57$.

Тогда $$4 - 0{,}58 \cdot 2{,}57 \leq M(x) \leq 4 + 0{,}58 \cdot 2{,}57$$

$$2{,}51 \leq M(x) \leq 5{,}49$$

или

$$M(x) = 4{,}0 \pm 1{,}5$$

Пример 3.9 Количество деталей, изготавливаемых ежедневно рабочим на протяжении 12 дней, равно:

289, 203, 359, 243, 232, 210, 251, 246, 224, 239, 220, 211.

Найти интервальную оценку (Р = 0,95) математического ожидания генеральной совокупности.

Решение. α = 1–Р = 1–0,95 = 0,05

$$\bar{x} = \frac{289+203+\ldots+211}{12} = 244$$

$$S^2 = \frac{(289-244)^2+(203-244)^2+\ldots+(211-244)^2}{11} = 1849$$

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1849}{12}} = 12{,}4; \qquad t_{0,95;11} = 2{,}2$$

$$244 - 12{,}4 \cdot 2{,}2 \leq M(X) \leq 244 + 12{,}4 \cdot 2{,}2$$

$$217 \leq M(X) \leq 271$$ деталей

Пример 3.10. Изучали воздействие нового препарата на массу тела мелкоопытных лабораторных мышей. Массы в граммах оказались равными:

24, 25, 29, 23, 29, 32, 24, 20, 25, 26, 25, 26, 27, 25, 25. Объем выборки n=15. Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	*Частота*	
20 – 22,4	*0,07*	$\overline{X}$ =25,67
22,4 – 24,8	*0,20*	*S=2,82*
24,8 – 27,2	*0,53*	
27,2 – 29,6	*0,13*	
29,6 – 32,0	*0,07*	

Построить гистограмму распределения частот и определить доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью P≥0.95.

Решение: Доверительный интервал вычисляем по формуле:

$$\bar{x}_в - m_{\bar{x}} \cdot t_{\alpha,f} \leq M(X) \leq \bar{x}_в + m_{\bar{x}} \cdot t_{\alpha,f}$$

Произведем предварительные вычисления: $m_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{2.82}{\sqrt{15}} = 0{,}73$

Доверительная вероятность и уровень значимости связаны соотношением: $\alpha = 1\text{-}P$. По условию задачи $P \geq 0.95$, следовательно $\alpha \leq 0.05$. Далее, объем выборки по условию задачи $n = 15$, следовательно, число степеней свободы $f = n\text{-}1 = 14$. По таблице 1 приложения находим критическое значение коэффициента Стьюдента: *t(0.05;14)=2,14*. Числовые значения подставляем в формулу доверительного интервала и производим вычисления:

$$25{,}67 - 0{,}73 \cdot 2{,}14 \leq M(X) \leq 25{,}67 + 0{,}73 \cdot 2{,}14$$

Округляя до целого, получаем

$$24 \leq \mathrm{M(X)} \leq 27$$

Вывод: С доверительной вероятностью P≥0.95, математическое ожидание генеральной совокупности попадает в доверительный интервал

24 ≤ M(X) ≤ 27 г

Построим гистограмму распределения частот, откладывая по оси абсцисс ширину класса, а по оси ординат – относительную частоту встречаемости (рис. 3.3).

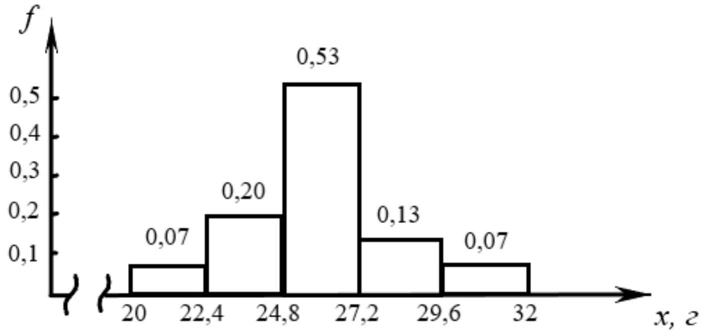


Рис. 3.3. Гистограмма распределения частот для примера 3.10

Тестовый контроль

3.1. Из следующих оценок параметров генеральной совокупности несмещенной является

A) выборочная дисперсия

B) выборочная средняя

C) выборочное среднее квадратическое отклонение

D) доверительная вероятность

3.2. Интервал, в котором с той или иной заранее заданной вероятностью находится неизвестный параметр генеральной совокупности, называется

A) доверительным

B) генеральным

C) уровнем значимости

D) вариационным размахом

3.3. Уровень значимости α равен 0.02, следовательно, доверительная вероятность

A) 0,2

B) 0,95

C) 0,98

D) 1

3.4. Интервальная оценка параметров генеральной совокупности характеризуется ….. числами и используется, если выборка ……… объема.

A) двумя, большого

B) двумя, малого

C) тремя, малого

D) дискретными, большого

3.5. Число степеней свободы при определении доверительного интервала для математического ожидания генеральной совокупности

A) $f = n_1 + n_2 - 2$

B) $f = n - 2$

C) $f = n - 1$

D) $f = n + 1$

3.6. Множество всех мыслимых значений наблюдений (объектов), однородных относительно некоторого признака, которые могли быть сделаны, называется

A) выборка

B) генеральная совокупность

C) статистическое распределение

D) гистограмма

3.7. Величина, которая характеризует точность выборочного среднего и определяется делением выборочного среднего квадратического отклонения на квадратный корень из объема выборки, называется

A) доверительным интервалом

B) доверительной вероятностью

C) уровнем значимости

D) ошибкой выборочной средней

3.8. При увеличении уровня значимости ширина доверительного интервала

A) Уменьшается

B) Увеличивается

C) Не меняется

D) Стремится к единице

3.9. Отношение среднего квадратического отклонения к средней величине признака, выраженное в процентах, называется

A) мода

B) среднее квадратическое отклонение

C) коэффициент вариации

D) выборочная дисперсия

3.10. Оценка параметра генеральной совокупности, которая определяется одним числом, называется

A) Несмещенной

B) Точечной

C) Интервальной

D) Состоятельной

3.11. Раздел математики, изучающий приближенные методы отыскания законов распределения и их числовых характеристик по результатам эксперимента, называется

A) математическая статистика

B) статистическая гипотеза

C) прикладная математика

D) критерий значимости

3.12. Совокупность случайно отобранных наблюдений (объектов) для непосредственного изучения называется

A) выборка

B) генеральная совокупность

C) статистическое распределение

D) гистограмма

3.13. При уменьшении объема выборки ширина доверительного интервала

A) Уменьшается

B) Увеличивается

C) Не меняется

D) Стремится к единице

3.14. Среднее арифметическое значение вариант статистического ряда

A) мода

B) среднее выборочное

C) медиана

D) дисперсия

3.15. Среднее арифметическое квадратов отклонения вариант от их среднего значения

A) мода

B) средняя выборочная

C) медиана

D) выборочная дисперсия

3.16. Статистическая оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки, называется

A) Несмещенной

B) Вероятной

C) Смещенной

D) Обратной

3.17. Числовой интервал, который определяется двумя числами – границами интервала, содержащий неизвестный параметр генеральной совокупности, является……оценкой генерального параметра.

A) Несмещенной

B) Интервальной

C) Состоятельной

D) Эффективной

3.18. Величина, определяемая как квадратный корень из выборочной дисперсии, называется

A) мода

B) среднее квадратическое отклонение

C) коэффициент вариации

D) выборочная дисперсия

3.19. Вероятность того, что исследуемая величина выйдет за назначенный ей интервал, называется

A) доверительным интервалом

B) доверительной вероятностью

C) уровнем значимости

D) вариационным размахом

3.20. При уменьшении уровня значимости ширина доверительного интервала

A) Уменьшается

B) Увеличивается

C) Не меняется

D) Стремится к единице

3.21. Выборка, дающая обоснованное представление о генеральной совокупности, называется

A) статической

B) рандомизированной

C) репрезентативной

D) случайной

3.22. Выборка, элементы которой отобраны из генеральной совокупности случайным образом, называется

A) статистической

B) рандомизированной

C) репрезентативной

D) представительной

3.23. Если при увеличении объема выборки выборочная характеристика стремится к соответствующей характеристике генеральной совокупности, такая точечная характеристика называется

A) Несмещенной

B) Интервальной

C) Состоятельной

D) Эффективной

3.24. Если точечная оценка генерального параметра имеет наименьшую дисперсию выборочного распределения по сравнению с другими аналогичными оценками, она называется

A) Несмещенной

B) Интервальной

C) Состоятельной

D) Эффективной

3.25. При увеличении объема выборки ширина доверительного интервала

A) Уменьшается

B) Увеличивается

C) Не меняется

D) Стремится к единице

3.26. При увеличении доверительной вероятности ширина доверительного интервала

A) Уменьшается

B) Увеличивается

C) Не меняется

D) Стремится к единице

УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ

3.27. Установите соответствие между формулами и вычисляемыми величинами.

ФОРМУЛА	НАЗВАНИЕ ВЕЛИЧИНЫ
А) $C = \frac{S}{\bar{x}_в} \cdot 100\%$	1) Выборочная средняя
Б) $m_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$	2) Ошибка выборочной средней
В) $S_в^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2$	3) Выборочная дисперсия
Г) $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i$	4) Коэффициент вариации

В заданиях 3.28 – 3.59 по выборочным данным составьте статистическое распределение, постройте полигон частот, вычислите выборочную среднюю, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3.28. Изучали воздействие нового препарата на массу тела лабораторных мышей (г). Результаты измерений: 31, 29, 30, 36, 29, 29, 27, 30, 25, 31, 36, 29, 28, 28, 30, 29, 30, 31, 29, 27, 40, 25.

3.29. Изучали рост мужчин 25 лет в городской местности (см). Результаты измерений: 188, 178, 180, 168, 175, 170, 160, 170, 178, 171, 185, 160, 180, 185, 180, 170, 160, 180, 170, 172, 173.

3.30. Изучали среднее систолическое давление в конечной стадии шока (мм рт.ст.). Результаты измерений:120, 110, 120, 85, 70, 80, 85, 60, 80, 85, 80, 70, 70, 80, 80, 120, 85, 70, 80, 85, 60, 80.

3.31. Изучали воздействие определенной физиопроцедуры на частоту сердечных сокращений (уд\мин) у группы испытуемых. Результаты измерений: 120, 110, 120, 140, 120, 100, 110, 140, 160, 140, 180, 120, 100, 140, 140, 120, 110, 120, 140, 120, 100.

3.32. Изучали среднее диастолическое давление в начальной стадии шока. (мм рт.ст.). Результаты измерений: 60, 50, 90, 85, 70, 80, 85, 60, 50, 60, 60, 70, 70, 50, 60, 85, 70, 80, 85, 60, 50, 60.

3.33. Значение пульса у студентов после физкультуры (уд./мин): 120, 110, 120, 100, 90, 100, 120, 160, 90, 100, 160, 120, 110, 120, 100, 90, 100, 120, 160, 90, 100, 160.

3.34. Изучали средний рост детей в возрасте 5 лет (см). Результаты измерений:110, 110, 120, 90, 90, 100, 115, 100, 115, 110, 100, 70, 90, 100, 120, 90, 90, 100, 115, 100, 115, 110, 100, 70.

3.35. Изучали глазо-сердечный рефлекс у детей дошкольного возраста. Изучение проводили методом прикосновения пальцем к глазному яблоку с последующей регистрацией времени наступления сердечного рефлекса. Были получены следующие значения времени (сек): 12, 9, 7, 5, 1, 8, 10, 2, 8, 3, 6, 2, 7, 8, 7, 5, 1, 8, 10, 2, 8.

3.36. В возрастной группе детей 3-5 лет был проведен тест резистентности эмали (ТЭР-тест). Величины ТЭР-индекса выражаются в баллах и могут колебаться от 1 до 4. Результаты исследования: 1, 2, 1, 1, 4, 3, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 4, 3, 3, 2, 4, 3, 1, 4, 2, 3, 3, 3, 4.

3.37. Изучали действие сока чеснока на гноящиеся раны. Исследования проводили на одновозрастной группе подопытных животных. Эффект оценивали в баллах от 1 до 10. Результаты исследования: 7, 8, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 6, 5, 2, 5, 3, 6, 4, 3, 2, 6, 5, 6, 7, 6.

3.38. Составлена выборка результатов анализов на содержание кальция (мг %) в сыворотке крови обезьян: 11, 11, 12, 15, 11, 14, 16, 13, 14, 13, 11, 11, 12, 17, 10, 13, 19, 22, 12, 11, 12, 17, 10.

3.39. Был проведен анализ на содержание гемоглобина в крови здоровых пациентов мужского пола (г/л). Результаты оказались следующими: 135, 143, 143, 149, 157, 160, 157, 136, 140, 159, 135, 143, 143, 149, 157, 160, 157, 136, 157, 136, 140, 159, 135

3.40. Был проведен анализ на содержание гемоглобина в крови здоровых пациентов женского пола (г/л). Результаты оказались следующими:129, 120, 135, 140, 129, 136, 121, 135, 140, 122, 126, 120, 135, 141, 129, 133, 121, 135, 146, 122, 123, 130, 120.

3.41. Был проведен анализ на содержание гемоглобина в крови мужчин с легкой степенью анемии (г/л). Результаты оказались следующими:99, 110, 99, 101, 96, 97, 118, 99, 111, 97, 101, 116, 99, 101, 95, 97, 119, 91, 111, 97, 88, 100.

3.42. Был проведен анализ на содержание гемоглобина в крови женщин с легкой степенью анемии. Результаты оказались следующими (в г/л): 93, 99, 91, 104, 98, 110, 93, 98, 91, 102, 107, 91, 93, 99, 90, 102, 98, 109, 93, 97, 91, 102.

3.43. Исследовался показатель скорости оседания эритроцитов в группе пациентов, больных туберкулезом легких. Результаты исследования (в мм/ч): 45, 41, 57, 59, 41, 77, 65, 59, 60, 42, 45, 41, 55, 59, 41, 76, 65, 60, 60, 42, 71, 47.

3.44. Наблюдения за сахаром в крови у здоровых пациентов до 60 лет дали такие результаты (ммоль/л): 4.0, 4.1, 4.5, 4.3, 4.0, 4.8, 4.5, 5.0, 5.4, 4.5, 4.0, 4.1, 4.5, 4.1, 4.0, 4.8, 4.7, 5.0, 5.4, 4.5, 5.0.

3.45. Наблюдения за сахаром в крови у пациентов с 1 степенью диабета дали такие результаты (ммоль/л):9.0, 8.1, 10.0, 7.0, 8.6, 8.1, 7.9, 7.0, 9.8, 7.0, 9.0, 8.1, 10.0, 7.1, 8.6, 8.0, 7.9, 7.3, 9.8, 7.0, 8.5.

3.46. Изучали сатурацию крови у больных с 1 степенью дыхательной недостаточности (в %). Результаты исследования:90, 91, 93, 92, 94, 91, 92, 94, 92, 93, 90, 96, 93, 92, 94, 89, 92, 91, 90, 91.

3.47. Изучали сатурацию крови у больных со 2 степенью дыхательной недостаточности (в %). Результаты исследования: 75, 77, 86, 80, 88, 89, 86, 78, 88, 76, 83, 75, 77, 86, 80, 87, 89, 77, 79, 81.

3.48. Анализ крови на общий холестерин (ХС) у здоровых пациентов дал следующие результаты (в ммоль/л): 3.1, 4.3, 5.1, 3.1, 4.3, 5.2, 4.0, 4.3, 5.0, 4.8, 3.1, 4.3, 5.0, 3.1, 4.3, 4.9, 4.0, 4.3, 5.0, 4.2, 4.4.

3.49. Анализ крови на общий холестерин (ХС) у пациентов, больных хроническим пиелонефритом, дал следующие результаты (в ммоль/л): 6.0, 5.9, 6.1, 6.2, 6.0, 6.2, 6.2, 6.1, 6.3, 5.9, 6.0, 5.9, 6.1, 5.6, 6.0, 5.9, 6.6, 6.1, 6.3, 5.8, 5.6.

3.50. Был проведен биохимический анализ крови на общий билирубин для группы пациентов, не имеющих проблем со здоровьем. Полученные значения (мкмоль/л): 16.6, 10.0, 10.3, 6.5, 15.0, 13.3, 9.5, 9.3, 10.0, 15.0, 6.5, 9.5, 12.0, 10.0, 6.5, 16.6, 10.0, 9.9, 6.5, 15.0, 13.3, 9.1, 9.3, 10.0.

3.51. Был проведен биохимический анализ крови на общий билирубин для группы пациентов с хроническим гепатитом В. Полученные значения (мкмоль/л): 43, 80, 31, 30, 56, 84, 31, 55, 43, 56, 43, 80, 31, 30, 51, 84, 33, 55, 49, 56, 60, 86, 39, 53.

3.52. Был проведен биохимический анализ крови на уровень активности аланинаминотрансферазы (АЛТ) для группы здоровых пациентов. Полученные значения (МЕ/л, МЕ – Международная единица):10, 23, 39, 11, 36, 22, 11, 35, 23, 8, 36, 23, 10, 23, 39, 10, 36, 22, 16, 35, 21, 8.

3.53. Был проведен биохимический анализ крови на уровень активности аланинаминотрансферазы (АЛТ) для группы больных острым вирусным гепатитом. Полученные значения (МЕ/л, МЕ – Международная единица):
600, 502, 630, 556, 521, 502, 556, 638, 630, 502, 597, 556, 601, 502, 630, 559, 521, 502, 556, 606, 630, 597.

3.54. Исследовались значения фермента липазы у группы пациентов с острой формой панкреатита. Результаты (Ед/л): 350, 199, 180, 197, 205, 197, 301, 456, 197, 360, 350, 199, 182, 197, 205, 184, 301, 456, 486, 360.

3.55. Исследовались значения фермента амилазы у группы пациентов с острой формой панкреатита. Результаты (Ед/л): 1050, 995, 1111, 969, 1000, 950, 802, 902, 1000, 790, 995, 1007, 995, 1040, 969, 1121, 950, 802, 902, 1006.

3.56. Был проведен анализ содержания холекальциферола (витамина D_3) у пациентов возрастной группы от 55 до 65 лет. Полученные результаты (нг/мл): 20, 25, 29, 26, 30, 25, 19, 25, 28, 26, 20, 25, 20, 26, 30, 25, 15, 25, 28, 26, 31.

3.57. Составлена выборка из результатов анализов на содержание креатинина в крови мужчин (мкмоль/л): 62, 67, 100, 65, 108, 67, 114, 110, 66, 108, 62, 67, 99, 65, 108, 69, 114, 100, 66, 108, 75.

3.58. Составлена выборка из результатов анализов на содержание креатинина в крови женщин (мкмоль/л): 55, 95, 59, 87, 95, 66, 90, 54, 69, 74, 55, 95, 59, 80, 95, 66, 73, 54, 69, 70, 51.

3.59. Составлена выборка из результатов анализов на содержание общего белка в крови детей 1-2 года (г/л): 53, 57, 60, 70, 69, 51, 77, 60, 74, 69, 51, 65, 69, 60, 53, 57, 60, 70, 69, 66, 70, 60, 71, 63, 51.

В задачах 3.60 – 3.76

- Построить **гистограмму распределения** частот.
- Определить **доверительный интервал** для математического ожидания с доверительной вероятностью **P$\geq$0,95.**

3.60. Изучали систолическое давление в начальной стадии шока (мм рт.ст.) у людей, умерших после шока. Объем выборки n=12**.** Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
79 – 90	0,17	$\overline{X}$=101,83
90 – 101	0,25	S=12,7

101 - 112	0,33	
112 – 123	0,25	

3.61. Изучали среднее артериальное давление в конечной стадии шока (мм рт.ст.). Объем выборки n=23. Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
51 – 64	0,03	$\overline{X}$ =82,1
64 –77	0,17	S=15,2
77 - 90	0,34	
90 - 103	0,3	
103 – 116	0,16	

3.62. Изучали содержание магния (мг%) в сыворотке крови здоровых кроликов. Объем выборки n=20. Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
9 - 9.5	0,2	$\overline{X}$ =10
9.5 – 10	0,5	S=0,6
10 – 10.5	0,2	
10.5 - 11	0,10	

3.63. Изучали содержание кальция (мг%) в сыворотке крови больных обезьян. Объем выборки n=11. Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
5 - 5.75	0,09	$\overline{X}$ =6,86
5.75 – 6.5	0,18	S=0,8
6.5 – 7.25	0,46	
7.25 – 8	0,27	

3.64. Изучали систолическое давление в начальной стадии шока (мм рт.ст.) у людей, оставшихся в живых. Объем выборки n=21**.** Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
93 - 105	0,04	$\overline{X}$ =124
105 - 117	0,28	S=13,1
117 - 129	0,36	
129 – 141	0,23	
141 – 153	0,09	

3.65. Изучали рост мужчин 25 лет (см) для городской местности. Объем выборки n=19**.** Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
160 –164	0,1	$\overline{X}$ =170
164 – 168	0,15	S=4
168 - 172	0,38	
172 - 176	0,27	

176 – 180	0,1	

3.66. Изучали воздействие определенной физиопроцедуры на частоту сердечных сокращений у группы испытуемых. Объем выборки n=18**.** Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
67 – 68,2	0,05	$\overline{X}$=70
68,2 – 69,4	0,16	S=8
69,4 – 70,6	0,54	
70,6 – 71,8	0,20	
71,8 – 73,0	0,05	

3.67. Изучали рост студентов колледжа (см). Объем выборки n=30. Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
160 –164	0,01	$\overline{X}$=172
164 – 168	0,15	S=4
168 - 172	0,48	
172 - 176	0,27	
176 – 180	0,09	

3.68. Изучали среднее артериальное давление в конечной стадии шока (мм рт.ст.). Объем выборки n=15**.** Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
89 – 94	0,06	$\overline{X} = 100$
94 – 99	0,34	S = 4,8
99 – 104	0,4	
104 – 109	0,2	

3.69. Изучали среднее артериальное давление в начальной стадии шока (мм рт.ст.). Объем выборки n=23. Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
59 - 70	0,17	$\overline{X} = 85$
70 - 81	0,20	S = 16,4
81 – 92	0,46	
92 - 103	0,17	

3.70. Изучали воздействие нового препарата на массу тела лабораторных мышей (г). Объем выборки n=19. Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
64 – 68,75	0,12	$\overline{X} = 74$
68,75 – 73,5	0,32	S = 10
73,5 – 78,25	0,43	
78,25 - 83	0,13	

3.71. Изучали среднее артериальное давление в конечной стадии шока (мм рт.ст.). Объем выборки n=15**.** Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
51 – 57	0,13	$\overline{X} = 63$
57 – 63	0,41	S = 6,3
63 – 69	0,26	
69 – 75	0,2	

3.72. Изучали систолическое давление в начальной стадии шока (мм рт.ст.). Объем выборки n=23. Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
192 – 106	0,09	$\overline{X}=122$
106 – 120	0,25	S=12,7
120 – 134	0,52	
134 – 148	0,14	

3.73. Изучали воздействие определенной физиопроцедуры на частоту сердечных сокращений (уд/мин) у группы испытуемых. Объем выборки n=16. Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
67 –68,5	0,12	$\overline{X} = 71$
68,5 – 70	0,26	S = 5
70 – 71,5	0,48	
71,5 - 73,0	0,12	
73– 74,5	0,02	

3.74. Изучали рост мужчин 25 лет (см) для сельской местности. Объем выборки n=21**.** Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
161 – 165	0,04	$\overline{X}$ = 172
165 –169	0,19	S = 9
169 – 173	0,47	
173 – 177	0,21	
177 – 181	0,09	

3.75. Изучали рост мужчин 30 лет (см) для сельской местности. Объем выборки n=24**.** Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
160 – 165	0,10	$\overline{X}$ = 173
165 –170	0,16	S = 9
170 – 175	0,51	
175 – 180	0,19	
180 – 185	0,04	

3.76. Изучали воздействие нового препарата на массу тела лабораторных мышей (г). Объем выборки n=15. Проведена статистическая обработка данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Частота	
60 – 64,25	0,14	$\overline{X} = 69$
64,25 – 68,5	0,38	S = 9
68,5 – 72,75	0,26	
72,75 - 77	0,22	

4. Проверка статистических гипотез

В предыдущем разделе был рассмотрен интервальный метод оценки генеральных параметров по выборочным данным. Однако на практике исследователям часто требуется не просто оценить параметр, но и сравнить параметры между собой. Например:

- Сравнение эффективности нового лекарства с плацебо или стандартным препаратом.
- Сопоставление среднего роста в двух различных популяциях.
- Оценка влияния экологического фактора на здоровье в разных регионах.

Для проведения таких сравнений в математической статистике используется аппарат проверки статистических гипотез.

Статистическая гипотеза – это научно обоснованное предположение о свойствах генеральной совокупности (о виде распределения, значении параметра, связи между признаками), которое можно проверить на основе выборочных данных. Статистическую гипотезу обозначают латинской буквой *H* (Hypothesis – лат.) с индексами.

Нулевая гипотеза (H_0) - это гипотеза об отсутствии эффекта, различий или влияния. Она формулируется как предположение о том, что различия между генеральными параметрами сравниваемых групп статистически незначимы, а наблюдаемые в выборках расхождения носят случайный характер (обусловлены ошибкой выборки).

Альтернативная гипотеза (H_1) - гипотеза, противоположная нулевой. Она утверждает, что различия между генеральными параметрами значимы и не могут быть объяснены лишь случайностью.

Задача проверки статистических гипотез состоит в том, чтобы на основе объективного математического правила и выборочных данных принять решение - либо отвергнуть нулевую гипотезу H_0 в пользу альтернативной гипотезы H_1, либо не отвергнуть H_0 (признать ее согласующейся с данными). Важно понимать, что гипотезу не доказывают, а либо отвергают, либо не находят достаточных оснований для её отвержения.

Для проверки гипотезы используют *статистический критерий* - математическое правило, в соответствии с которым принимается или отвергается та или иная статистическая гипотеза с заданным уровнем значимости. Критерии бывают параметрические и непараметрические.

Параметрические критерии представляют собой функции параметров заданной совокупности и используются, когда данные подчиняются известному закону распределения (чаще всего нормальному).

Непараметрические критерии не требуют предположений о точном законе распределения генеральной совокупности. Они менее мощные, но более универсальные, работают с рангами, а не с исходными значениями.

4.1. Сравнение генеральных средних двух нормально распределенных случайных величин (малые независимые выборки)

Рассмотрим классический параметрический метод для случая, когда необходимо сравнить средние значения признака в двух независимых группах: t-критерий Стьюдента. Критерий можно применять, если:

- Исследуемый признак в обеих генеральных совокупностях имеет нормальное распределение;
- Генеральные дисперсии совокупностей однородны ($\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2$). Это предположение можно проверить с помощью F-критерия Фишера.

1. Выдвигаем гипотезы:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$. Генеральные средние равны.

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$. Генеральные средние не равны.

2. Вычисляем экспериментальное значение t-критерия по формуле:

$$t_{эксп} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1) \cdot S_y^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}} \qquad (4.1)$$

где n_x, n_y - объемы выборок величин X и Y соответственно, $\bar{x}, \bar{y}$ - выборочные средние, S^2_x, S^2_y – выборочные (несмещенные) оценки.

3. Определяем число степеней свободы:

$$f = n_x + n_y - 2$$

4. По таблице критических точек распределения Стьюдента для выбранного уровня значимости α (например, 0.05) и найденного числа степеней свободы f находим критическое значение критерия $t_{кр}(\alpha; f)$.

5. Если $|t_{эксп}| < t_{кр}$ не отвергаем нулевую гипотезу. Различие генеральных средних статистически незначимо.

Если $|t_{эксп}| > t_{кр}$ нулевую гипотезу отвергаем в пользу конкурирующей гипотезы H_1: различие в выборочных средних значимо и является проявлением различия генеральных средних.

Пример 4.1. *Измерения пульса 10 больных, проведенные после некоторой процедуры, и 12 больных контрольной группы дали следующие результаты: для I группы X = 70 уд/мин, для II группы Y=68 уд/мин; оценки дисперсий соответственно равны:* $S^2_x = 9$ *(уд/мин)*^{2}, $S^2_y = 4$ *(уд/мин)*^{2}. *Расчетное значение t критерия составило* $t_{эксп} = 1.87$. *При уровне* *значимости* $\alpha \leq 0,05$ *определить, значимо ли различаются средние значения пульса у больных этих двух групп.*

Р е ш е н и е: В качестве нулевой принимаем гипотезу о равенстве средних значений пульса в генеральных совокупностях больных, принявших процедуру, и больных, ее не принявших.

Число степеней свободы $f = n_x + n_y - 2 = 10+12-2=20$. Из таблицы находим критическое значение t-критерия: $t_{кр}(0,05; 20) = 2,09$. Так как $t_{эксп} < t_{кр}$ нулевую гипотезу следует считать согласующейся с результатами наблюдения.

Вывод: при уровне значимости $\alpha \leq 0,05$ различие в средних значениях пульса не является статистически значимым и может быть обусловлено случайными причинами, а не влиянием процедуры.

4.2. Проверка гипотезы о равенстве генеральных дисперсий (F-критерий Фишера)

Критерий Фишера-Снедекора применяется в двух основных случаях: во-первых, для проверки гипотезы о равенстве генеральных дисперсий двух нормальных совокупностей - как необходимое условие перед использованием t-критерия Стьюдента для сравнения средних; во-вторых, в дисперсионном анализе для непосредственной проверки значимости влияния фактора на исследуемую переменную путём сравнения межгрупповой и внутригрупповой дисперсий. В обоих случаях критерий основан на распределении отношения дисперсий, но в первом случае он служит инструментом проверки предпосылок, а во втором - основным статистическим тестом для принятия решения о наличии эффекта.

1. Выдвигаем гипотезы:

H_0: $\sigma^2_x = \sigma^2_y$. Генеральные дисперсии равны.

H_1: $\sigma^2_x \neq \sigma^2_y$. Генеральные дисперсии различны.

2. Вычисляем наблюдаемого значения критерия. Критерий представляет собой отношение большей исправленной выборочной дисперсии к меньшей:

$$F_{эксп} = S^2_б / S^2_м \qquad (4.2)$$

3. Определяем числа степеней свободы:

f_1 - уменьшенный на единицу объем выборки с большей дисперсией, f_2 - уменьшенный на единицу объем выборки с меньшей дисперсией.

4. По таблице критических значений распределения Фишера — Снедекора (см. таблицу 2) при уровне значимости α находим критическое значение $F_{кр}(\alpha,\ f_1,, f_2)$.

5. Если $F_{эксп} \le F_{кр}$ нулевая гипотеза не отвергается. Различие генеральных дисперсий незначимо.

Если $F_{эксп} > F_{кр}$, нулевую гипотезу отвергают в пользу альтернативной. Различие генеральных дисперсий статистически значимо.

Пример 8.2. *При уровне значимости $\alpha< 0,05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по результатам, приведенным в примере 4.1.*

Р е ш е н и е**:** Подставив численные значения в формулу (4.2), получим $F_{эксп} = 9/4 =2,25$. Сравнивая оценки дисперсий, определяем, что большая дисперсия соответствует выборке с объемом 10. Тогда число степеней свободы $f_{1=}10\text{-}1=9$. Объем выборки с меньшей оценкой дисперсии равен 12, следовательно, $f_2=12\text{-}1=11$. По таблице критических значений распределения Фишера - Снедекора (см. таблицу 2) находим $F_{кр}(0,05;\ 9;\ 11) =2,9$. Поскольку $F_{эксп} < F_{кр}$, гипотезу о равенстве генеральных дисперсий можно считать согласующейся с результатами наблюдений.

4.3. Критерий согласия хи-квадрат (χ^2) Пирсона

Во многих статистических методах (например, в параметрических критериях) критически важным является предположение о законе распределения данных. Критерий хи-квадрат (χ^2) Пирсона — это мощный инструмент для проверки гипотезы о том, что наблюдаемое эмпирическое распределение выборки соответствует некоторому предполагаемому теоретическому распределению (нормальному, равномерному, биномиальному и др.). Критерий оценивает степень расхождения между наблюдаемыми (эмпирическими) частотами m_i и частотами m_i', которые можно было бы ожидать при справедливости выбранного теоретического закона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - m_i'')^2}{m_i'} \qquad (4.3)$$

где k-число классов, на которые разбит диапазон частот, m_i – наблюдаемая частота в i-м интервале, m_i' - теоретическая (ожидаемая) частота в i-м интервале.

Символ χ^2 не является квадратом какого-то числа, а лишь выражает величину, определяемую данной формулой. Чем больше сумма квадратов стандартизированных отклонений, тем сильнее эмпирическое распределение отличается от теоретического.

1. Выдвигаем гипотезы:

H_0: Наблюдаемое распределение соответствует выбранному теоретическому закону.

H_1: Наблюдаемое распределение не соответствует выбранному теоретическому закону.

2. Вычисляем наблюдаемого значения критерия.

Вариационный ряд разбиваем на k интервалов. Определяем теоретические и эмпирические частоты для каждого из интервалов. По формуле (4.3) вычисляем наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл}$.

3. Определяем число степеней свободы. При проверке на нормальность: f=k−3. Вычитание 3 связано с тремя наложенными связями: использованием оценок выборочного среднего, выборочной дисперсии и общего объема выборки.

4. По таблице критических точек распределения χ^2 (таблица 3) для выбранного уровня значимости α и найденного числа степеней свободы *f* находим $\chi^2_{кр}$.

5. Если $\chi^2_{набл} \leq \chi^2_{кр}$ нулевая гипотеза не отвергается. Нет оснований считать, что распределение отличается от теоретического.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ нулевая гипотеза отвергается. Распределение значимо отличается от проверяемого

Пример 4.3. *В таблице приведены эмпирические и вычисленные по нормальному закону частоты распределения длины ступни у 287 новорожденных. Из приведенных данных видно, что между этими частотами нет полного совпадения. При $\alpha \leq 0,05$ нужно установить, случайны или закономерны эти различия, т.е. следует ли это распределение нормальному закону. Расчет χ^2 – критерия дал значение 1,58.*

Эмпирические частоты	*6*	*9*	*12*	*31*	*71*	*82*	*46*	*19*	*8*	*6*
Теоретические частоты	*6*	*10*	*12*	*34*	*68*	*78*	*51*	*20*	*9*	*6*

Р е ш е н и е : Количество пар значений в таблице равно 10, следовательно вторичное количество классов k=10. Число степеней свободы при этом $f=k$-3=10-3=7. Используя таблицу 3, определяем $\chi^2_{кр}$ (α,f)= $\chi^2_{кр}$ (0,05, 7)=14,07. Анализируем и получаем, что $\chi^2_{факт} < \chi^2$, т.к. 1,58<14,07, следовательно, реализовалась нулевая гипотеза: различия, наблюдаемые между эмпирическими и вычисленными или ожидаемыми частотами, носят исключительно случайный характер.

Вывод: распределение случайных величин описывается нормальным законом.

Тестовый контроль

4.1. В случае, если при проверке гипотезы о равенстве дисперсий выяснилось, что наблюдаемое значение критерия выше критического, можно сделать вывод:

A) различие генеральных средних значимо

B) различие генеральных средних незначимо

C) различие генеральных дисперсий значимо

D) различие генеральных дисперсий незначимо

4.2. К параметрическим критериям проверки статистических гипотез относится:

A) Критерий знаков

B) Критерий Стьюдента

C) Критерий Манна-Уитни

D) Критерий Вилкоксона

4.3. Примером параметрического критерия проверки статистических гипотез является:

A) Критерий знаков

B) Критерий Фишера

C) Критерий Манна-Уитни

D) Критерий Вилкоксона

4.4. Критерий, с помощью которого НЕ исследуют соответствие закона распределения выборочных данных некоторому известному закону распределения:

A) Стьюдента

B) согласия

C) Пирсона

D) хи-квадрат

4.5. Критерий, не позволяющий определить соответствие закона распределения выборочных данных некоторому известному закону распределения:

A) Фишера

B) согласия

C) Пирсона

D) хи-квадрат

4.6. Критическое значение критерия НЕ зависит от:

A) числа степеней свободы

B) объема выборки

C) математического ожидания

D) уровня значимости

4.7. Критическое значение критерия зависит от:

A) среднего выборочного значения

B) дисперсии и среднего квадратического отклонения

C) числа степеней свободы и уровня значимости

D) ни от чего не зависит, это постоянная

4.8. Критическое значение критерия зависит от:

A) среднего выборочного значения

B) дисперсии и среднего квадратического отклонения

C) объема выборки

D) ни от чего не зависит, это постоянная

4.9. Критическое значение критерия определяется следующим образом:

A) по соответствующим таблицам

B) задается исследователем

C) является математической константой

D) определяется экспериментально

4.10. Для выборок разного объема критическое значение критерия:

A) разное

B) задается исследователем

C) определяется экспериментально

D) одинаковое

4.11. Любое высказывание о генеральной совокупности, проверяемое по выборке, называется:

A) математическая статистика

B) статистическая гипотеза

C) статистический анализ

D) критерий значимости

4.12. Предположение о равенстве генеральных средних двух генеральных совокупностей, проверяемое по выборкам, называется:

A) вероятностный анализ

B) статистическая гипотеза

C) гипотетический анализ

D) доверительная вероятность

4.13. Критическое значение критерия НЕ зависит от:

A) числа степеней свободы

B) объема выборки

C) выборочного среднего

D) уровня значимости

4.14. Наблюдаемое значение критерия определяется следующим образом

A) по соответствующей таблице

B) задается исследователем

C) является математической константой

D) по соответствующей формуле

4.15. Экспериментальное значение критерия определяется следующим образом:

A) равно выборочному среднему

B) задается исследователем

C) по теории вероятностей

D) вычисляется по формуле

4.16. Наблюдаемое значение критерия Фишера всегда:

A) меньше нуля

B) меньше единицы

C) нормируется

D) больше либо равно единице

4.17. Экспериментальное значение критерия Фишера всегда:

A) отрицательное

B) меньше единицы

C) лежит в интервале [-1;1]

D) больше либо равно единице

4.18. Наблюдаемое значение критерия Фишера равно

A) отношению большей дисперсии к меньшей

B) отношению меньшей дисперсии к большей

C) произведению дисперсий

D) квадрату дисперсии

4.19. Отношение исправленного значения большей дисперсии к меньшей определяет:

A) наблюдаемое значение критерия Фишера

B) наблюдаемое значение критерия Пирсона

C) критическое значение критерия Фишера

D) критическое значение критерия Стьюдента

4.20. Критерий, который используют для проверки соответствия закона распределения выборочных данных некоторому известному закону распределения:

A) знаков

B) Манна-Уитни

C) Пирсона

D) Стьюдента

4.21. Параметрический критерий, наиболее часто используемый для сравнения дисперсий:

A) знаков

B) Манна-Уитни

C) Фишера

D) Стьюдента

4.22. В случае, если при проверке гипотезы о равенстве дисперсий выяснилось, что наблюдаемое значение критерия меньше критического, можно сделать вывод:

A) различие генеральных средних значимо

B) различие генеральных средних незначимо

C) различие генеральных дисперсий значимо

D) различие генеральных дисперсий незначимо

4.23. Число, которое не может стать уровнем значимости:

A) 0,001

B) 0,01

C) 0,05

D) 0,5

4.24. Параметрический статистический критерий - это функция, зависящая от:

A) критического значения критерия

B) параметров данной совокупности

C) уровня значимости

D) доверительной вероятности

4.25. Параметрический статистический критерий определяется:

A) его критическим значением

B) параметрами данной совокупности

C) априорной вероятностью

D) доверительным интервалом

4.26. В случае, если при проверке гипотезы по критерию Пирсона о соответствии данных наблюдений выбранному закону распределения, наблюдаемое значение критерия меньше критического, можно сделать вывод:

A) различие генеральных средних значимо

B) различие генеральных средних незначимо

C) данные наблюдений согласуются с выбранным законом распределения

D) данные наблюдений не согласуются с выбранным законом распределения

4.27. При проверке гипотезы о соответствии закона распределения НЗР с использованием критерия Пирсона, наблюдаемое значение критерия меньше критического, можно сделать вывод:

A) различие генеральных дисперсий значимо

B) различие генеральных дисперсий незначимо

C) данные описываются нормальным законом распределения

D) данные наблюдений не согласуются с выбранным законом распределения

4.28. Правило, позволяющее основываясь только на выборке принять или отвергнуть нулевую гипотезу, называется:

A) доверительная вероятность

B) статистическая гипотеза

C) статистический критерий

D) уровень значимости

4.29. Правило, позволяющее основываясь на выборочных данных принять или отвергнуть альтернативную гипотезу, называется:

A) априорная вероятность

B) статистическая гипотеза

C) статистический критерий

D) уровень значимости

4.30. При использовании параметрических критериев в случае, когда экспериментальное значение критерия $K_{набл}$ меньше его критического значения $K_{крит}$:

A) отвергают нулевую гипотезу

B) принимают альтернативную гипотезу

C) принимают нулевую гипотезу

D) отвергают обе гипотезы, выдвигают новую

4.31. При использовании параметрических критериев в случае, когда наблюдаемое значение критерия больше его критического значения:

A) выдвигают другую нулевую гипотезу

B) принимают альтернативную гипотезу

C) считают верной нулевую гипотезу

D) отвергают обе гипотезы, выдвигают новую

4.32. При использовании параметрических критериев нулевая гипотеза принимается при:

A) $K_{набл}$ меньше $K_{крит}$

B) $K_{набл}$ равно $K_{крит}$

C) $K_{набл}$ больше $K_{крит}$

D) $K_{набл}$ меньше уровня значимости

4.33. При использовании параметрических критериев альтернативная гипотеза принимается при:

A) $K_{набл}$ меньше $K_{крит}$

B) $K_{набл}$ равно $K_{крит}$

C) $K_{набл}$ больше $K_{крит}$

D) $K_{набл}$ меньше

4.34. В математической статистике гипотезу обозначают:

A) H

B) G

C) X

D) A

4.35. В математической статистике альтернативную гипотезу обозначают:

A) H_1

B) H_0

C) X

D) A

4.36. Справедливость нулевой гипотезы проверяется:

A) сравнением уровня значимости и доверительной вероятности

B) сравнением наблюдаемого значения критерия и критического

C) сравнением наблюдаемого значения критерия и уровня значимости

D) сравнением уровня значимости и критического значения критерия

4.37. Справедливость альтернативной гипотезы устанавливается:

A) сравнением уровня значимости и доверительной вероятности

B) сравнением наблюдаемого значения критерия и критического

C) сравнением наблюдаемого значения критерия и уровня значимости

D) сравнением уровня значимости и критического значения критерия

4.38. Выберите верное утверждение:

A) Выборка - это часть генеральной совокупности

B) Генеральная совокупность - это часть выборки.

C) Выборки малого объема всегда репрезентативны.

D) Генеральная совокупность имеет малый объем.

4.39. В математической статистике основную гипотезу обозначают:

A) H_0

B) H_1

C) A

D) O

4.40. Применение параметрических критериев для проверки статистических гипотез возможно, если экспериментальные данные имеют:

A) нормальный закон распределения

B) детерминированный характер

C) неизвестный закон распределения

D) экспоненциальный закон распределения

4.41. Требование, которое НЕ предъявляется к выборке для применения параметрических критериев проверки статистических гипотез:

A) нормальный закон распределения

B) большой объем выборки

C) количественное выражение величины

D) экспоненциальный закон распределения

4.42. В статистических исследованиях уровень значимости определяется:

A) исследователем

B) по таблице

C) по формуле

D) по графику

4.43. В медицине и фармации принятая доверительная вероятность:

A) 0,95

B) 1

C) 0,05

D) это математическая константа

4.44. Число, которое НЕ может стать уровнем значимости:

A) 0,001

B) 0,01

C) 0,05

D) 0,95

4.45. В случае нормального закона распределения случайных величин, если при проверке гипотезы о равенстве средних выяснилось, что наблюдаемое значение критерия ниже критического, можно сделать вывод:

A) различие генеральных средних значимо

B) различие генеральных средних незначимо

C) различие генеральных дисперсий значимо

D) различие генеральных дисперсий незначимо

4.46. Уровнем значимости не может быть число равное:

A) 0,05

B) 0,01

C) 0,02

D) 0,99

4.47. Уровень значимости принимается равным:

A) нулю

B) малому числу (0,001; 0,01, 0,05)

C) 0,5

D) единице

4.48. Число степеней свободы для определения критического значения критерия Стьюдента в задаче проверки гипотезы о равенстве генеральных средних значений определяется по формуле:

A) f=n-1

B) f=n-2

C) $f=n_1+n_2-2$

D) f=k-3

4.49. Доверительная вероятность НЕ может принимать значение:

A) 0,95

B) 0.98

C) 0,05

D) 0.9

4.50. Доверительная вероятность может принимать значение:

A) 0,05

B) 0

C) -1

D) 0.95

4.51. Число степеней свободы для определения критического значения критерия Пирсона в задаче проверки гипотезы о соответствии распределения заданному закону:

A) f=n-1

B) f=n-2

C) $f=n_1+n_2-2$

D) f=k-3

4.52. Доверительная вероятность равна 0.9. Это означает, что уровень значимости равен:

A) 0

B) 0,1

C) 0,9

D) 1

4.53. Уровень значимости равный 0,01 означает, что доверительная вероятность:

A) 0

B) 0,99

C) не может быть задана

D) 0,95

4.54. В случае, если при проверке гипотезы о равенстве средних выяснилось, что наблюдаемое значение критерия ниже критического, можно сделать вывод:

A) различие генеральных средних значимо

B) различие генеральных средних незначимо

C) различие генеральных дисперсий значимо

D) различие генеральных дисперсий незначимо

4.55. Вероятность ошибки отвергнуть нулевую гипотезу, если в действительности она верна, называется:

A) доверительная вероятность

B) статистическая гипотеза

C) критерий

D) уровень значимости

4.56. Выборка - это часть

A) доверительного интервала

B) модели статистического исследования

C) уровня значимости

D) генеральной совокупности

4.57. Гипотеза H_0, заключающаяся в том, что сравниваемые генеральные параметры равны и различия, наблюдаемые между выборками случайны, называется:

A) альтернативная

B) математическая

C) основная

D) конкурирующая

4.58. Гипотеза, заключающаяся в том, что сравниваемые генеральные параметры отличаются незначимо,

A) обозначается H_1 и называется альтернативной

B) обозначается H_1 и называется основной

C) обозначается H_0 и называется основной

D) обозначается H_0 и называется конкурирующей

4.59. Гипотеза H_1, противоречащая H_0 и заключающаяся в том, что сравниваемые генеральные параметры различаются, называется:

A) альтернативная

B) математическая

C) основная

D) выборочная

4.60. Гипотеза, заключающаяся в том, что сравниваемые генеральные параметры различаются значимо:

A) обозначается H_1 и называется альтернативной

B) обозначается H_1 и называется основной

C) обозначается H_0 и называется альтернативной

D) обозначается H_0 и называется основной

4.61. Для проверки гипотез о равенстве дисперсий из параметрических критериев используют критерий:

A) Пирсона

B) Фишера

C) Стьюдента

D) знаков

4.62. Гипотеза: "Различие генеральных средних незначимо" является:

A) альтернативной в критерии Стьюдента

B) основной в критерии Стьюдента

C) альтернативной в критерии Пирсона

D) основной в критерии Пирсона

4.63. Для проверки гипотез о равенстве средних из параметрических критериев используют критерий:

A) Пирсона

B) Фишера

C) Стьюдента

D) знаков

4.64. Для проверки гипотез о равенстве средних можно использовать непараметрический критерий:

A) Пирсона

B) Фишера

C) Стьюдента

D) знаков

4.65. К параметрическим критериям проверки статистических гипотез НЕ относится:

A) Критерий Фишера

B) Критерий Стьюдента

C) Критерий знаков

4.66. К непараметрическим критериям проверки статистических гипотез относится:

A) Критерий Фишера

B) Критерий Стьюдента

C) Критерий Вилкоксона

Решите задачи

4.67. Даны результаты измерений пульса 11 студентов, проведенных сразу после окончания занятий по физкультуре (выборка X_1) и 10 студентов - через 30 минут после окончания занятий по физкультуре (выборка X_2): $\overline{X_1}$= 140 уд/мин, $\overline{X_2}$= 74 уд/мин . Расчетное значение t- критерия составило $t_{эксп}$ = - 3,1. При уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ определить значимость различия средних значений пульса.

4.68. Произведены измерения роста 23 детей в возрасте 5 лет (выборка X_1) и роста 25 детей в возрасте 14 лет. Оценки дисперсий соответственно равны S_1^2 = 30 см^2, S_2^2 = 130 см^2. При уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по результатам проведенных измерений.

4.69. Даны результаты измерений пульса 13 студентов, проведенных перед началом занятий по физкультуре (выборка X_1) и 12 студентов - после окончания занятий по физкультуре (выборка X_2) : $\overline{X_1}$= 86 уд/мин , $\overline{X_2}$= 152 уд/мин . Расчетное значение t- критерия составило $t_{эксп}$ = - 3,32. При уровне значимости $\alpha \leq 0,05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных средних значений пульса.

4.70. Даны результаты измерений систолического давления в начальной стадии шока (мм рт. ст.) у 13 больных, оставшихся в живых после шока (выборка X_1) и у 12 больных, умерших после шока (выборка X_2): $\overline{X_1}= 66$, $\overline{X_2}= 173$. Расчетное значение t- критерия составило $t_{эксп} = 3,59$. При уровне значимости $\alpha \leq 0,05$ определить значимость различия средних значений систолических давлений.

4.71. Даны результаты измерений среднего артериального давления (мм рт. ст.) у 25 больных в начальной стадии шока (выборка X_1) и у 24 больных в конечной (выборка X_2) стадиях шока: $\overline{X_1}= 99$, $\overline{X_2}= 63$. Расчетное значение t-критерия составило $t_{эксп} = 2,47$. При уровне значимости $\alpha \leq 0,05$ определить значимость различия этих средних значений.

4.72. Даны результаты измерений систолического давления в начальной стадии шока (мм.рт. ст.) у 11 больных, оставшихся в живых после шока (выборка X1) и у 11 больных, умерших после шока (выборка X2): $\overline{X_1}_{ср}= 137$, $\overline{X_2}= 87$. Расчетное значение t- критерия составило $t_{эксп} = 3,08$. При уровне значимости $\alpha \leq 0,05$ определить значимость различия этих средних значений.

4.73. Даны результаты измерений диастолического давления (мм рт. ст.) у 18 мужчин (выборка X_1) и у 23 женщин (выборка X_2): $\overline{X_1}= 84$, $\overline{X_2}= 80$. Расчетное значение t- критерия составило $t_{эксп} = 1,8$. При уровне значимости $\alpha \leq 0,05$ определить значимость различия этих средних значений.

4.74. Даны результаты измерений частоты сердечных сокращений 13 студентов, проведенных сразу после окончания занятий по физкультуре (выборка X_1) и 10 студентов - через 30 минут после окончания занятий по физкультуре (выборка X_2): оценки дисперсий соответственно равны $S^2_1= 139,9$, $S^2_2 = 74,2$. При уровне значимости $\alpha \leq 0,05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по результатам проведенных измерений.

4.75. Измеряли систолическое давление в начальной стадии шока (мм рт.ст.) у 12 больного, оставшихся в живых (выборка X_1) и у 10 больных, умерших после шока (выборка X_2): оценки дисперсий соответственно равны $S^2{}_1$= 172,8, $S^2{}_2$ = 161,4. При уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по результатам проведенных измерений.

4.76. Была измерена частота сердечных сокращений у 13 студентов перед началом занятий по физкультуре (выборка X_1) и у 12 студентов после окончания занятий (выборка X_2): оценки дисперсий соответственно равны $S^2{}_1$= 79,6, $S^2{}_2$ = 125,2. При уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по результатам проведенных измерений.

4.77. Было измерено систолическое давление в начальной стадии шока (мм рт.ст.) у 15 больных, оставшихся в живых (выборка X_1) и у 13 больных, умерших после шока (выборка X_2): оценки дисперсий соответственно равны $S^2{}_1$= 73,8, $S^2{}_2$ = 116,9. При уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по результатам проведенных измерений.

4.78. Изучали среднее артериальное давление (мм рт.ст.) у 25 больных в начальной (выборка X_1) и у тех же 25 больных (выборка X_2) в конечной стадиях шока: оценки дисперсий соответственно равны $S^2{}_1$= 28,8, $S^2{}_2$ = 40,2. При уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по результатам проведенных измерений.

4.79. Измеряли среднее артериальное давление (мм рт.ст.) у 13 больных в начальной (выборка X_1) и у тех же 13 больных (выборка X_2) в конечной стадиях шока: оценки дисперсий соответственно равны $S^2{}_1$= 270,2, $S^2{}_2$ = 233,9. При уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по результатам проведенных измерений.

4.80. Средняя масса таблеток, найденная по выборке объемом 35 из первой партии, составила 0,5 г; по выборке объемом 40 из второй партии – 0,51 г. Расчетное значение t –критерия составило $t_{эксп}$= -1,52. При $\alpha \leq 0{,}05$

выяснить, можно ли считать различие в средних значениях масс таблеток случайным.

4.81. Изучали влияние кобальта на массу тела кроликов. Опыт проводился на двух группах животных: опытной объемом 18 и контрольной объемом 19. Опытные кролики в отличие от контрольных ежедневно получали добавку к рациону в виде хлористого кобальта по 0,06 г на 1 кг массы. За время опыта животные дали следующие прибавки живой массы тела: $\overline{X_1}$= 638 г при дисперсии S_1^2= 2596,3 г^2 против $\overline{X_2}$ = 626 г и дисперсии S_2^2= 3579 г^2 у контрольной группы. Можно ли для оценки достоверности этой разности использовать критерий Стьюдента? Привести обоснование – расчеты с использованием критерия Фишера при $\alpha \leq 0{,}05$.

4.82. Изучали влияние эндотоксина на выживаемость облученных животных. В опытной группе было 36 животных, выжило 23 (63,9%). В контрольной группе было 14 животных, выжило после облучения 3 (21,4%). Можно ли судить о положительном влиянии эндотоксина на выживаемость животных, если наблюдаемое значение t –критерия Стьюдента $t_{набл}$=2,71. Уровень доверительной вероятности принять $P\geq 0{,}95$.

4.83. Изучали влияние температурного режима содержания на массу животных. Опыт проводился в двух группах: в первой опытной группе было 27 животных, во второй контрольной группе 30. Оценки дисперсий соответственно равны S_1^2= 2696 г^2 и S_2^2= 3700 г^2. При уровне значимости $\alpha\leq 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по представленным результатам измерений.

4.84. Средняя масса таблеток, найденная по выборке объемом 16 из первой партии, составила 0,5 г; по выборке объемом 13 из второй партии – 0,51 г. Вычисленные значения оценок дисперсии: S_1^2= 0,3 г^2 и S_2^2= 0,9 г^2. При уровне значимости $\alpha\leq 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по результатам проведенных измерений.

4.85. В таблице приведены эмпирические и вычисленные по нормальному закону частоты распределения значений роста 267 мужчин. Из приведенных данных видно, что между этими частотами нет полного совпадения. При $\alpha \leq 0,05$ нужно установить, случайны или закономерны эти различия, т.е. следует ли это распределение роста мужчин нормальному закону. Расчет χ^2 – критерия дал значение 1,47.

Эмпирические частоты 12 31 71 82 46 19 16

Теоретические частоты 12 34 68 78 51 20 15

4.86. В таблице приведены эмпирические и вычисленные по нормальному закону частоты распределения урожайности фасоли для 200 семян. При $\alpha \leq 0,05$ установить, случайны или закономерны эти различия, т.е. следует ли это распределение нормальному закону. Расчет χ^2 – критерия дал значение 20,09.

Эмпирические частоты 10 15 17 45 70 51 46 16 10

Теоретические частоты 9 13 21 22 88 69 49 18 10

5. Корреляционный и регрессионный анализы

Корреляционный анализ – это статистический метод, позволяющий оценить степень и направления связи между двумя или более случайными величинами. Его цель - ответить на вопрос: существует ли статистически значимая связь между показателями и насколько она сильна.

Регрессионный анализ - это статистический метод, который устанавливает аналитическую форму зависимости одной переменной (зависимой, результативной) от одной или нескольких других. Его цель - построить математическую модель, позволяющую прогнозировать значение зависимой переменной по известным значениям независимых.

5.1. Функциональная и корреляционная зависимости

Функциональная зависимость - это зависимость вида $y = f(x)$, когда каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y. Например, площадь круга S однозначно связана с радиусом окружности R:$S = \pi R^2$.

Корреляционная зависимость – зависимость, при которой изменение одной переменной приводит к изменению среднего значения другой. Например, связь между ростом и весом человека. При одном росте вес может варьироваться, но в среднем более высокие люди имеют больший вес.

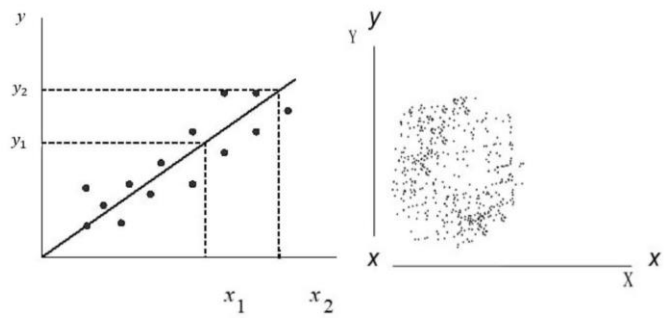
$$\bar{y} = f(x) \qquad (5.1)$$

Установление взаимосвязи между различными признаками и показателями функционирования организма позволяют по изменениям одних судить о состоянии других.

Первичный анализ связи начинают с построения *поля корреляции* (*корреляционное поле точек*) - точечного графика, где по оси абсцисс откладываются значения одного признака, а по оси ординат - значения другого.

Если точки образуют выраженную полосу, вытянутую вдоль прямой (Рис. 5.1А), это свидетельствует о наличии линейной корреляционной связи.

Если точки рассеяны хаотично, без видимой закономерности (Рис. 5.1Б), это указывает на отсутствие линейной связи.



А **Б**

Рис. 5.1. Поле корреляции

Если точки группируются вдоль некоторого направления (рис.5.1, А), то это говорит о наличии линейной корреляционной связи между признаками.

Если точки распределены равномерно (рис.5.1, Б), то линейная корреляционная связь отсутствует.

5.2. Коэффициент линейной корреляции и его свойства

Для количественной оценки силы и направления линейной связи между двумя количественными признаками, распределенными нормально, используется выборочный коэффициент линейной корреляции Пирсона (r):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \qquad (5.2)$$

Свойства коэффициента корреляции r:

1. Диапазон значений: $-1 \leq r \leq 1$.
2. Знак: r > 0 — прямая (положительная) связь: увеличение одного признака в среднем сопровождается увеличением другого;

   r < 0 — обратная (отрицательная) связь: увеличение одного признака в среднем сопровождается уменьшением другого.
3. Сила связи (интерпретация по модулю |r|):

   0 < |r| <0.3 - связь очень слабая.

   0.3 ≤ |r| < 0.5 - слабая связь.

   0.5 ≤ |r| < 0.7 - умеренная связь.

   0.7 ≤ |r| < 0.9 - сильная связь.

   0.9 ≤ |r | < 1.0 - очень сильная связь.

   |r| = 1 - строгая линейная функциональная зависимость.
4. Симметричность: $r_{xy} = r_{yx}$ Коэффициент корреляции не указывает, какая переменная является причиной, а какая - следствием. x и y могут взаимно заменяться, не влияя на величину r.

5. Безразмерность и инвариантность: Величина *r* не имеет единиц измерения. Если все значения переменных увеличить (уменьшить) на одно и то же число или в одно и то же число раз, то величина коэффициента корреляции не изменится.

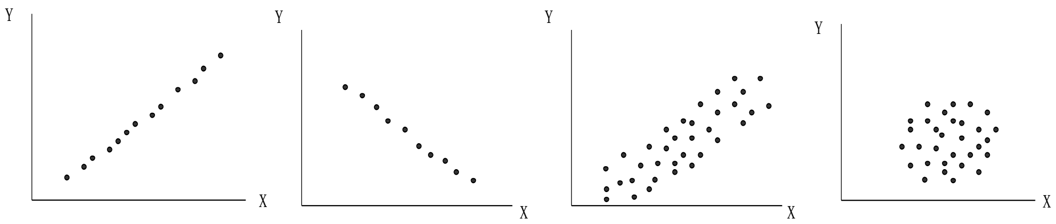
Для корректной интерпретации коэффициента Пирсона данные должны удовлетворять предположению о нормальности каждого из признаков. При нарушении этого условия используют непараметрические аналоги (например, коэффициент корреляции рангов Спирмена)

Задача. 5.1. На рисунке 5.2. приведены примеры зависимостей Y от X и отдельно даны значения коэффициента корреляции *r*. Найти соответствие между значениями коэффициента корреляции и графиками зависимостей.

Значения *r:*

1) 1; 2) 0,8; 3) 0; 4) -1.

Примеры зависимостей:



А **Б** **В** **Г**

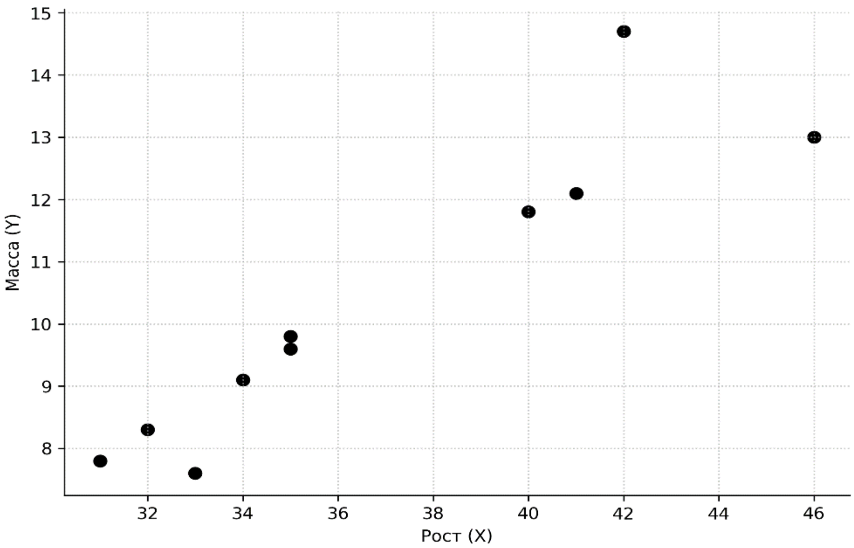
Рис.5.2. Корреляционные поля точек

Ответ: 1А; 2В; 3Г; 4Б.

Задача. 5.2. Построить корреляционное поле точек и вычислить коэффициент корреляции между ростом (X) и массой (Y) некоторых животных. Исходные данные приведены в выборке объема $n = 10$.

x_i	31	32	33	34	35	35	40	41	42	46
y_i	7,8	8,3	7,6	9,1	9,6	9,8	11,8	12,1	14,7	13,0

Р е ш е н и е .



$$r = \frac{\sum (x-\bar{x}) \cdot (y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2 \sum (y-\bar{y})^2}}$$

.

Средний рост $\bar{x}$: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$, $\bar{x} = \frac{31+32+.....+46}{10} = \frac{369}{10} = 36{,}9.$

Средняя масса $\bar{y}$: $\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$, $\bar{y} = \frac{7{,}8+8{,}3+.....+13{,}0}{10} = 10{,}38.$

Находим:

$$\sum (x-\bar{x}) \cdot (y-\bar{y}) = (31-36{,}9) \cdot (7{,}8-10{,}38) + \ldots + (46-36{,}9) \cdot (13-10{,}38) = \\ = 99{,}9;$$

$$\sum (x-\bar{x})^2 = (31-36{,}9)^2 + (32-36{,}9)^2 + \ldots + (46-36{,}9)^2 = 224{,}8;$$

$$\sum (y-\bar{y})^2 = (7{,}8-10{,}38)^2 + (8{,}3-10{,}38)^2 + \ldots + (13{,}0-10{,}38)^2 = 51{,}9.$$

Подставим полученные значения в формулу для *r*:

$$r = \frac{99{,}9}{\sqrt{224{,}8 \cdot 51{,}9}} = 0{,}925$$

.

Величина r близка к 1, что говорит о тесной связи роста и массы животных.

5.3. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента линейной корреляции

Полученный из выборки коэффициент корреляции r - это лишь выборочная оценка истинного, но неизвестного генерального коэффициента корреляции $r_{\text{ген}}$. Поскольку выборка случайна, вычисленное значение r также является случайной величиной и может колебаться от выборки к выборке даже при одном и том же $r_{\text{ген}}$. Следовательно, сам по себе факт получения ненулевого значения r (например, r = 0.6) не гарантирует, что связь реально существует в генеральной совокупности. Это может быть следствием случайной флуктуации в данной конкретной выборке.

1. Выдвигаем гипотезы:

H_0: $r_{\text{ген}}= 0$. Истинный коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю. Линейной корреляционной связи между признаками нет. Наблюдаемое в выборке значение r обусловлено случайностью отбора.

H_1: $r_{\text{ген}} \neq 0$. Истинный коэффициент корреляции в генеральной совокупности не равен нулю. Линейная корреляционная связь между признаками существует.

2. Задаем уровень значимости, например, $\alpha \leq 0{,}05$.
3. Вычислим наблюдаемое (эмпирическое) значение t-критерия как отношение выборочного коэффициента корреляции к своей ошибке

$t_{набл} = \frac{|r|}{m_r}$, где m_r - ошибка коэффициента корреляции.

Если объем выборки $n < 100$, то $m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$;

Если объем выборки $n > 100$, то $m_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$.

4. Определим число степеней свободы по формуле:

$$f = n - 2.$$

5. Найдем критическое значение по таблице критических точек распределения Стьюдента для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы $t_{\text{крит}}(\alpha, f)$.

6. Если $t_{\text{набл}} < t_{\text{крит}}$- Нет оснований отвергать *H₀*. Коэффициент корреляции статистически незначим. Говорить о наличии линейной связи в генеральной совокупности на основе этих данных нельзя.

Если $t_{\text{набл}} \geq t_{\text{крит}}$ - H_0 отвергается в пользу H_1. Делается вывод: коэффициент корреляции статистически значим на уровне α. Наблюдаемая линейная связь, вероятно, существует в генеральной совокупности.

Задача. 5.3. Проверить значимость коэффициента корреляции $r = 0{,}74$ между переменными X и Y для выборки объема *n* = 50.

Р е ш е н и е : Выдвигаем нулевую гипотезу H_0 об отсутствии линейной корреляционной связи между переменными X и Y в генеральной совокупности H_0: $r_{ген}= 0$.

При справедливости этой гипотезы $t_{\text{набл}} = \frac{r}{m_r}$, где ошибка коэффициента корреляции $m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$ и $t_{\text{набл}} = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ имеет распределение Стьюдента с $f = n - 2$ степенями свободы.

Рассчитаем: $t_{набл} = \frac{0{,}74 \cdot \sqrt{50-2}}{\sqrt{1-0{,}74^2}} = 7{,}62.$

По таблицам находим табличное значение t – критерия Стьюдента, определенное на уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ и при числе степей свободы $f = 50\text{-}2 = 48$, $t_{крит}$ ($\alpha \leq 0{,}05$; 48) = 2,02.

Поскольку $t_{\text{набл}} > t_{\text{крит}}$, 7,62 > 2,02 коэффициент корреляции значимо отличается от нуля. Причем это справедливо и для уровня значимости:

$\alpha \leq 0{,}001$ ($t = 3{,}55$).

Задача. 5.4. По выборке объема n = 122, извлеченной из нормальной двумерной совокупности (X,Y), найден выборочный коэффициент линейной корреляции r = 0,4. При уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу H_0, которая заключается в том, что связь между признаками случайна.

Р е ш е н и е .

$H_0\colon r_{\text{ген}} = 0$, $H_1\colon r_{\text{ген}} \neq 0$, $\alpha \leq 0{,}05$, $t_{крит} = 1{,}98$,

$f = 120$, $t_{крит}(\alpha \leq 0{,}05; 120) = 1{,}98$ $t_{\text{набл}} = \frac{r\sqrt{n}}{1-r^2}$,

$t_{набл} = \frac{0{,}4\sqrt{122}}{1-0{,}16} = \frac{0{,}4 \cdot 11}{0{,}84} = 5{,}24.$

Сравниваем: $t_{набл} > t_{\text{крит}(\alpha,f)}$, 5,24 > 1,98 $\Rightarrow$ H_1, отвергается нулевая гипотеза.

Вывод: имеется умеренная линейная корреляционная связь между признаками: r = 0,4 ($\alpha \leq$ 0,05).

5.4. Линейный регрессионный анализ и метод наименьших квадратов

В условиях, когда каждое наблюдение (например, заболевание) характеризуется множеством взаимосвязанных показателей, возникает задача не просто установить наличие связи, но и количественно описать ее уравнением. Регрессионный анализ решает именно эту задачу: он позволяет построить математическую модель зависимости, в которой одна переменная (зависимая, результативная, Y) выражается как функция одной или нескольких других переменных (независимых, X). Чаще всего регрессионный анализ используется для *прогноза*, т.е. предсказания значений ряда зависимых переменных по известным значениям независимых переменных. Например, прогноз уровня глюкозы в крови на основе дозы введённого препарата.

Регрессионный анализ имеет в своем распоряжении специальные процедуры проверки, является ли выбранная математическая модель *адекватной* для описания имеющихся данных.

Пусть результаты наблюдений, приведены в двумерной выборке:

Таблица 5.2

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

можно представить в виде корреляционного поля точек (рис.5.3), где каждая точка соответствует отдельным значениям x и y.

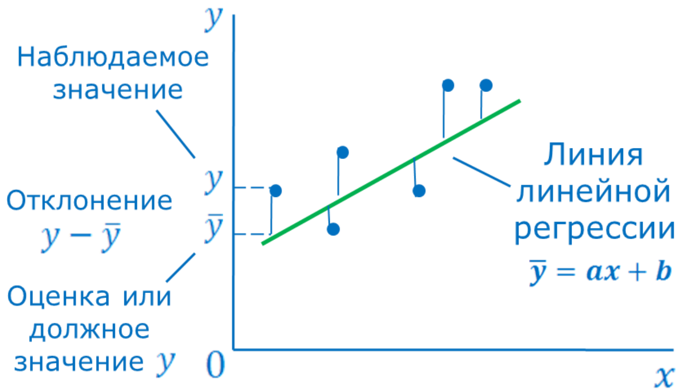


Рис. 5.3. Метод наименьших квадратов

В результате получается диаграмма рассеяния, позволяющая судить о форме и тесноте связи между изучаемыми признаками. В случае, представленном на рис.5.3, зависимость между наблюдениями может быть аппроксимирована прямой линией.

В линейной математической модели уравнение линейной регрессии имеет вид: $\bar{y} = ax + b$, где a и b - параметры линейной регрессии.

$\bar{y}$ - это предсказанное (расчетное, должное) значение зависимой переменной Y для данного X. Иными словами, это оценка среднего значения Y в генеральной совокупности для данного X.

a - коэффициент регрессии, показывающий, насколько в среднем величина одного признака Y изменяется при изменении на единицу меры другого признака X, корреляционно связанного с Y. Знак коэффициента регрессии указывает направление связи: при $a > 0$ – связь прямая, при $a < 0$ – обратная корреляционная связь. Геометрически $a=tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой, определяющий ее крутизну, т.е. скорость изменения функции.

b - свободный член в уравнении, Это предсказанное значение Y при x =0.

Параметры линейной регрессии определяют методом наименьших квадратов (МНК). Это способ подбора параметров регрессионной модели, согласно которому, сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от линии регрессии должна быть минимальна:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \Rightarrow min \qquad (5.3)$$

где y_i - реальное, наблюденное значение Y для i-го объекта,

$\bar{y}$ - значение Y, предсказанное моделью для того же объекта.

МНК находит такую линию, для которой сумма квадратов вертикальных расстояний от всех точек данных до этой линии является минимально возможной. Это делает МНК статистически эффективным методом, устойчивым к случайным колебаниям данных.

Построенная регрессионная линия (Рис. 5.3) является линией усредненной тенденции. Она не проходит через все точки, но наилучшим образом отражает общее направление связи.

Таким образом, корреляционно-регрессионного анализ дает представление о форме, направлении и тесноте связи. Уравнение регрессии переводит качественное представление о связи в точную математическую формулу, позволяющую делать обоснованные прогнозы.

Задача. 5.5. Исследована зависимость между ростом (X) и массой (Y), у 200 животных и рост, и масса подчиняются нормальному закону распределения. На рис.5.4. А видно, что эта зависимость линейная: чем больше рост, тем больше масса.

Из этой совокупности выберем выборку объема n = 10. (рис.5.4.Б). Сохранилась ли эта зависимость массы от роста? На рис.5.4.В изображены 4 прямые, аппроксимирующие эту зависимость. Какую прямую можно считать наилучшей?

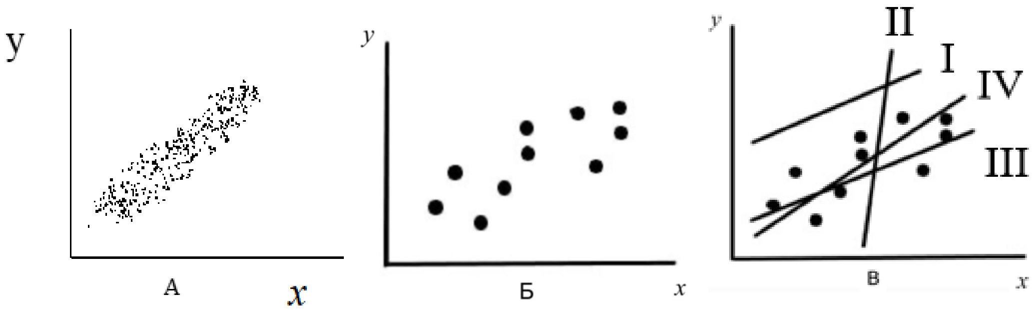


Рис. 5.4. Зависимость между ростом (X) и массой (Y) у животных

Ответ: Да, сохранилась. Прямая I – не годится - все точки оказались по одну сторону от нее. Прямая II - слишком круто устремляется вверх.

Лучше прямая III и IV, а из них лучше та, которая ближе ко всем точкам выборки, т.е. относительно которой разброс точек минимален.

Согласно методу наименьших квадратов лучше представляет зависимость $\bar{y}$ от x прямая IV.

Задача. 5.6. Провести корреляционно-регрессионный анализ. Построить корреляционное поле точек, проверить значимость (α≤0,05) коэффициента корреляции между переменными X и Y построить линию регрессии.

Изучали зависимость между содержанием вещества X в ткани C и приростом концентрации вещества Y в крови у пациентов, получавших препарат A.

Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 10:

x_i	1,15	1,9	3	5,34	5,4	7,7	7,9	9,03	9,37	10,18
y_i	0,99	0,98	2,6	5,92	4,33	7,68	9,8	9,47	10,64	12,39

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = 0,98; $t_{набл} = 15.1$; $\bar{y} = 0{,}34 + 1{,}12 \cdot x$

Р е ш е н и е . Построим корреляционное поле точек. Для этого нанесем каждую пару наблюдаемых значений переменных X и Y на двумерную координатную плоскость, где по оси абсцисс отложены значения независимой переменной X, а по оси ординат - значения зависимой переменной Y.

Для построения линии регрессии достаточно взять два произвольных, разумно удаленных друг от друга значения аргумента x_1 и x_2 в пределах диапазона имеющихся данных и последовательно подставить в уравнение $\bar{y} = 0{,}34 + 1{,}12 \cdot x$. Полученные пары координат $(x_1, \bar{y}_1)$, $(x_2, \bar{y}_2)$ наносим на то же корреляционное поле и соединяем их прямой линией. Эта прямая и будет линией регрессии, визуально демонстрирующей усредненную тенденцию изменения Y в зависимости от X.

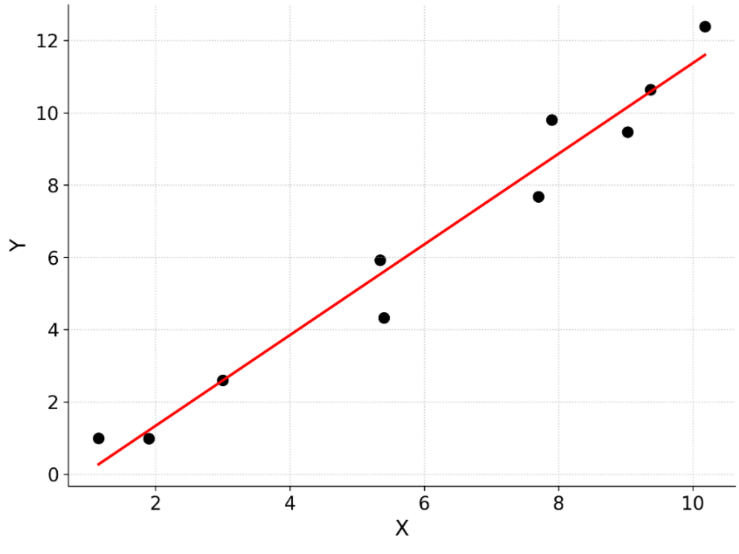


Рис. 5.5. График решения задачи 5.6.

Выдвигаем гипотезы:

$H_0: r_{ген} = 0$;

$H_1: r_{ген} \neq 0$.

Найдем из таблицы $t_{крит} = 2{,}31$; $\alpha \leq 0{,}05$;

f = 10-2 = 8.

Сравним: $t_{набл} > t_{крит(\alpha,f)}$: 15,1 > 2,31.

Отвергается H_0 и принимается H_1.

Имеется очень сильная прямая линейная корреляционная связь между признаками, r = 0,98, ($\alpha \leq 0{,}05$).

Нелинейная регрессия

Отметим, что корреляционные связи между признаками в биологии и медицине далеко не всегда имеют линейный характер. Линейные корреляционные связи - это наиболее простой вид зависимости, когда изменения одной переменной пропорционально отражаются на изменениях другой. Однако на практике часто встречаются более сложные, нелинейные зависимости, где связь между переменными описывается криволинейной функцией. Типичным примером является зависимость «доза-эффект», которая обычно описывается S-образной или логарифмической кривой: при увеличении дозы эффект сначала растет быстро, затем скорость роста замедляется, и в конечном итоге достигается плато, когда дальнейшее увеличение дозы уже не приводит к усилению ответа. Еще одной распространенной нелинейной зависимостью являются возрастные изменения физиологических показателей. Многие параметры, такие как скорость метаболизма или уровень гормонов, изменяются не равномерно, а ускоренно в периоды активного роста и старения, оставаясь относительно стабильными в зрелом возрасте. В психофизиологии нелинейной часто оказывается связь между временем реакции и интенсивностью стимула, а в педагогике и психологии - кривая обучения, отражающая зависимость успешности выполнения задачи от количества повторений или тренировочных сессий.

Для выявления нелинейной связи прежде всего необходим визуальный анализ корреляционного поля точек. Если точки на графике образуют не прямую линию, а явно выраженную кривую, это является первым признаком нелинейности. Еще одним важным индикатором служит низкое значение коэффициента линейной корреляции Пирсона при наличии очевидной закономерности на графике. Противоречие между числовым показателем и визуальной картиной указывает на то, что связь существует, но не является линейной.

Анализ нелинейных связей требует специальных методов. Основным подходом является нелинейная регрессия, которая позволяет подбирать и оценивать параметры криволинейных моделей. Выбор вида уравнения регрессии производится на основании опыта предыдущих исследований, литературных источников, профессионального мнения и визуального наблюдения расположения точек корреляционного поля.

Наиболее часто встречаются следующие виды уравнений нелинейной регрессии:

$\overline{y} = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ – полиномиальное уравнение;

$\overline{y} = ax^2 + bx + c$ – уравнение параболы второго порядка;

$\overline{y} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ – уравнение параболы третьего порядка;

$\overline{y} = \frac{a}{x} + b$ – гиперболическое уравнение.

Для определения неизвестных параметров регрессии используется метод наименьших квадратов.

Понимание нелинейного характера связи имеет важное практическое значение в клинической практике и медицинских исследованиях. Оно позволяет оптимизировать дозировки лекарственных средств, выявляя точку, после которой увеличение дозы перестает давать пропорциональный терапевтический эффект и может лишь усиливать побочные действия. Распознавание нелинейности помогает определять критические пороги биомаркеров, незначительное превышение которых приводит к резкому изменению клинического состояния пациента, как, например, в случае с уровнем глюкозы в крови.

Задача. 5.7. По данным таблицы исследовать зависимость урожайности зерновых культур Y (кг/га) от количества осадков X(см), выпавших в вегетационный период.

x_i	25	27	30	35	36	38	39	41	42	45	46	47	50	52	53
y_i	23	24	27	27	32	31	33	35	34	32	29	28	25	24	25

Построить корреляционное поле точек и предположить наиболее подходящий вид уравнения регрессии.

Р е ш е н и е Увеличение количества выпавших осадков приведет к увеличению урожайности до некоторого предела, после чего урожайность будет снижаться. Учитывая расположение точек корреляционного поля, можно предположить, что наиболее подходящим уравнением регрессии будет уравнение параболы. МНК подобрано уравнение линии регрессии.

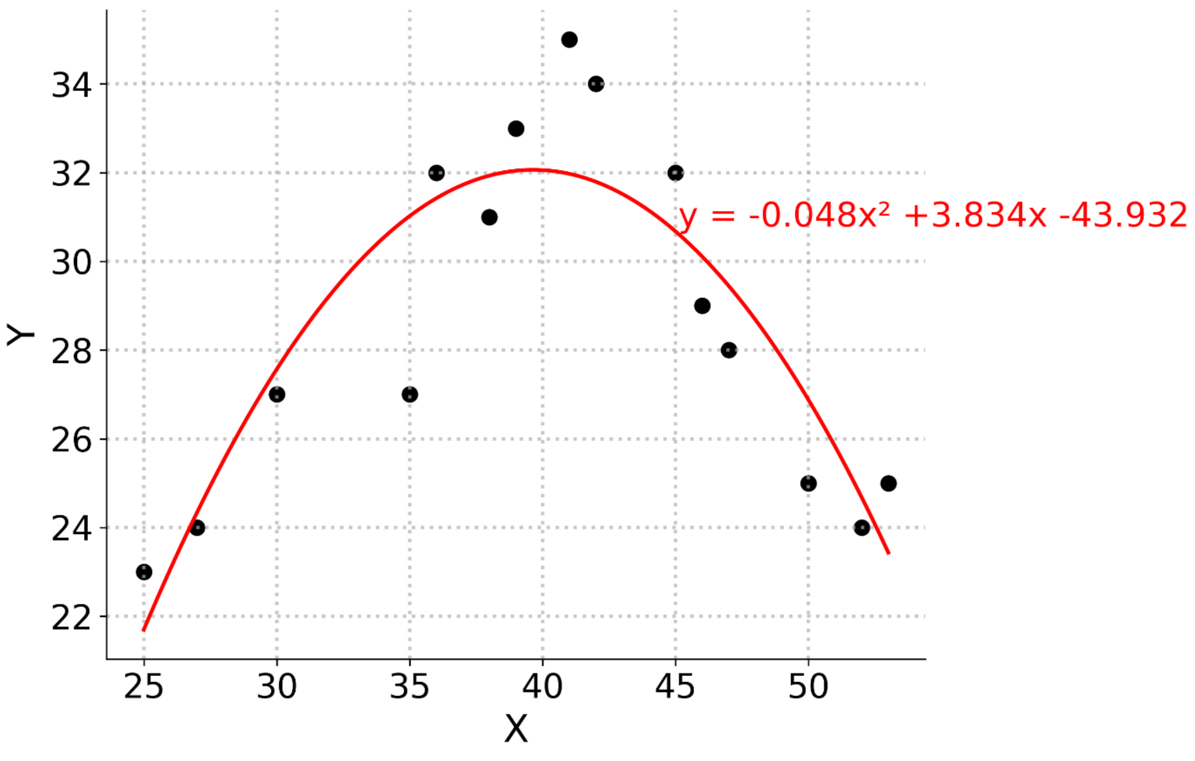


Рис. 5.6. График решения задачи 5.7.

Таким образом, при анализе биомедицинских данных исследователь должен быть готов к обнаружению различных форм зависимостей, применяя как методы линейного, так и нелинейного анализа для адекватного описания реальных взаимосвязей в организме.

Тестовый контроль

5.1. Теснота (сила) линейной корреляционной связи определяется:

A) Величиной коэффициента корреляции

B) Минимальным значением ошибки коэффициента корреляции

C) t-критерием Стьюдента

D) Нулевой гипотезой

E) Уравнением линейной регрессии

5.2. Если все значения переменной в двумерной выборке увеличить в 2 раза, то коэффициент корреляции:

A) Возрастет в 2 раза

B) Не изменится

C) Возрастет на 0.2

D) Уменьшится в 2 раза

5.3. Гипотеза H_1 для проверки значимости выборочного коэффициента линейной корреляции:

A) $r_{ген} = 0$

B) $\mu_1 < \mu_2$

C) $\sigma_1 = \sigma_2$

D) $r_{ген} \neq 0$

5.4. Гипотеза H_0 для проверки значимости выборочного коэффициента линейной корреляции:

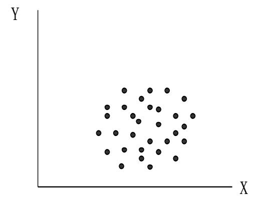
A) $r_{ген} = 0$

B) $\mu_1 < \mu_2$

C) $\sigma_1 = \sigma_2$

D) $r_{ген} \neq 0$

5.5. На рисунке приведено корреляционное поле точек, чему примерно равен коэффициент корреляции r:



A) 0

B) 0,5

C) 0,7

D) 0,9

E) 1

5.6. Если наблюдаемое значение t-критерия Стьюдента $t_{набл} = 4{,}2$, а критическая точка критерия $t_{кр}=2{,}3$ ($\alpha \leq 0{,}05$), r = 0,65 - это означает, что линейная корреляционная связь между признаками:

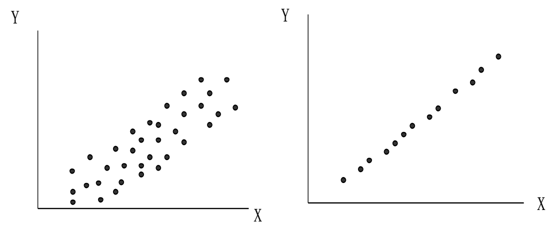
A) Очень сильная

B) Отрицательная

C) Отсутствует

D) Заметная

5.7. На рисунке приведены два корреляционных поля точек. Левый рисунок назовем случаем A, правый случаем B. Очевидно, что в случае A



A) Зависимость между Y и X более тесная, чем в случае B

B) Коэффициент корреляции должен быть меньше, чем случае B

C) Коэффициент корреляции должен быть больше, чем случае B

D) Коэффициент корреляции равен коэффициенту корреляции в случае В

5.8. О линейной регрессии говорят, если график регрессии изображается:

A) Параболой 2-го порядка

B) Параболой 3-го порядка

C) Кривой линией

D) Прямой линией

5.9. Параметр "b" в уравнении регрессии $\bar{y} = ax + b$ характеризует:

A) Значение $\bar{y}$ при x=1

B) Крутизну графика

C) Значение $\bar{y}$ при x=0

D) Тангенс угла наклона графика к оси абсцисс

5.10. Параметр "a" в уравнении регрессии $\bar{y} = ax + b$ характеризует:

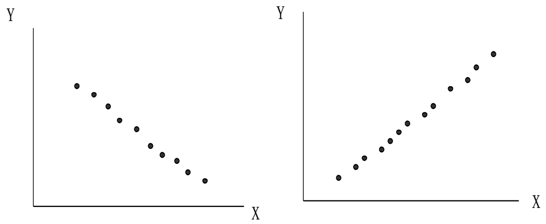
A) Значение $\bar{y}$ при x=1

B) Значение коэффициента корреляции

C) Значение y при x=0

D) Тангенс угла наклона графика к оси абсцисс

5.11. На рисунке приведены две корреляционные зависимости. Левый рисунок назовем случаем А, правый случаем В. Очевидно, что в случае А



A) Зависимость между y и x менее тесная, чем в случае Б

B) Связь прямая, а в случае Б связь обратная

C) Связь обратная, а в случае Б связь прямая

D) Коэффициент корреляции равен коэффициенту корреляции в случае В

5.12. Имеется двумерная выборка объема 19. Коэффициент корреляции между признаками X и Y равен r=0,7; наблюдаемое значение T-критерия Стьюдента $T_{набл}$=2,0, а критическая точка $T_{кр}$=2,36. Это означает, что линейная связь между признаками X и Y:

A) Очень сильная

B) Значительная

C) Имеется

D) Отсутствует

E) Функциональная

5.13. Дана двумерная выборка, коэффициент корреляции которой равен r = -0.85. Если все значения переменных X и Y увеличить на 0.1, то коэффициент корреляции станет равен:

A) –9,5

B) +0,85

C) -0,75

D) –0,85

E) +0,75

5.14. Дана двумерная выборка, коэффициент корреляции которой равен r = 0.75. Если все значения переменных X и Y увеличить в 2 раза, то коэффициент корреляции станет равен:

A) 1,5

B) +0,85

C) 0,75

D) –0,75

5.15. Если коэффициент линейной корреляции между признаками X и Y равен 0.5, то что можно сказать о коэффициенте корреляции, характеризующим связь между признаками Y и X?

A) Равен 1

B) Меньше 0.5

C) Равен 0.5

D) Равен 0

5.16. Если объем двумерной выборки меньше 100, то формула ошибки m коэффициента корреляции имеет вид:

A) $m_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$

B) $m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$

C) $m_r = \frac{S}{\sqrt{n}}$

D) $m_r = \frac{S^2}{\sqrt{n}}$

5.17. Если наблюдаемое значение T-критерия Стьюдента $T_{набл}$ = 4,2, а критическая $T_{кр}$ =2.3 при $\alpha \leq 0{,}05$, то можно сделать вывод, что линейная связь между признаками X и Y:

A) Очень сильная

B) Случайная

C) Имеется

D) Отсутствует

E) Функциональная

5.18. Коэффициент линейной корреляции r = 0. Это говорит о том, что

A) Фактор влияет на признак

B) Линейная корреляционная зависимость отсутствует

C) Связь функциональная

D) Статистическая зависимость присутствует

5.19. Выборочный коэффициент корреляции является оценкой генерального коэффициента корреляции, тем более точной, чем объем выборки

A) Меньше

B) Не имеет значения

C) Больше

D) Среди указанных ответов не правильного

Задачи для самостоятельного решения

Провести корреляционно-регрессионный анализ:

1. Построить корреляционное поле точек;
2. Проверить значимость ($\alpha \leq 0{,}05$) коэффициента корреляции между переменными X и Y;
3. Построить линию регрессии.

5.20. Изучали зависимость между содержанием коллагена Y и эластина X в магистральных артериях головы (*г*/100 *г* сухого вещества, возраст 36-50 лет).

Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 13:

x_i	13.98	10	7.26	11.8	8.82	13	7.1	12.17	7.11	8.2	11.4	10	11.9
y_i	35.5	42.82	47.79	43.29	49.47	35	47	36	47	50	39.11	47	40

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = - 0,89; m_r = 0,14; $\bar{y}$ = -2,05x + 63,96.

5.21. Изучали зависимость между содержанием коллагена Y и эластина X в магистральных артериях головы (*г*/100 *г* сухого вещества, возраст 51-75 лет).

Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 12:

x_i	14	13	7	8	7	8	12	13	10	8	11	10
y_i	34	38	54	46	50	49	35	36	47	50	40	47

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = -0,94; m_r = 0,1; $\bar{y}$= -2,58x + 69,85.

5.22. Изучали зависимость между систолическим давлением Y (мм рт.ст.) у мужчин в начальной стадии шока и возрастом X (годы). Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 11:

x_i	68	37	50	53	75	66	52	65	74	65	54
y_i	114	149	146	141	114	112	124	105	141	120	124

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = - 0,61; m_r = 0,26; $\bar{y}$ = -0,81x +175.

5.23. Имеется двумерная выборка объемом 14: X -масса новорожденных павианов - гамадрилов (*кг*) и Y -масса их матерей (*кг*).

x_i	0,7	0,73	0,75	0,7	0,65	0,7	0,61	0,7	0,63	0,8	0,85	0,7	0,7	0,65
y_i	10	10,8	11,3	10	11,1	11,3	10,2	13,5	12	9	11,5	11	9,5	8

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = 0,05; m_r = 0,29; $\bar{y}$ = 1,03x +9,9.

5.24. Изучали зависимость между суточной выработкой продукции на медицинском предприятии Y (*т*) и величиной основных производственных фондов X (*млн. руб*). Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 14:

x_i	25	30	31	32	34	35	36	36	38	39	40	42	42	45
y_i	15	16	18	20	24	25	38	40	45	45	46	48	48	50

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = 0,93; m_r = 0,1; $\bar{y}$ = 2,3x - 49,9.

5.25. Изучали зависимость между объемом валовой продукции Y (*тыс. руб*) и среднесуточной численностью рабочих X. Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 12:

x_i	25	20	31	32	20	35	28	30	30	29	31	31
y_i	200	160	300	310	240	350	290	310	320	300	330	340

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = 0,89; m_r = 0,14; $\bar{y} = 11{,}2x - 32$.

5.26. Изучали взаимосвязи гормонов ТТГ и Т3 у женщин при первичном бесплодии. Результаты наблюдений приведены в таблице.

ТТГ (мкМЕ/мл)	1.2	0.8	3.1	4.1	2.2	4.4	3.7	2.1	4	1.8	3	3.6	1.9
Т3 (пмоль/л)	3,1	5	2,9	3,3	4,1	4,2	4,8	3,4	3,6	2,7	3,5	4,5	3,8

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = 0,08; m_r = 0,3; $\bar{y} = 0{,}05x + 3{,}6$.

5.27. Изучали зависимость между объемом Y (*мкм* ^{3}) и диаметром X (*мкм*) сухого эритроцита у млекопитающих.

Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки:

x_i	7,6	8,9	5,5	9,2	3,5	4,8	7,3	7,4	6,8	7,1	5,9
y_i	87	81	50	112	18	37	71	69	54	68	60

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = 0,94; m_r = 0,11; $\bar{y} = 14x - 30$.

5.28. Изучали взаимосвязи гормонов ТТГ и кортизола у женщин при первичном бесплодии. Результаты наблюдений приведены в таблице.

ТТГ (мкМЕ/мл)	1.2	1,8	2.5	1.9	3.1	4.1	2.2	4.3	3.7	2.1	1.7	1.8	3	3.6	1.9
ТЗ (нмоль/л)	140	550	180	430	450	200	400	500	200	240	600	150	150	450	200

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = 0,01; m_r = 0,28; $\bar{y}$=1,3x + 316.

5.29. Изучали зависимость между массой тела гамадрилов - матерей X (*кг*) и их новорожденных детенышей Y (*кг*). Под наблюдением находилось 14 обезьян.

X, кг	10	10,8	11,3	10	10,1	11,1	11,3	10,2	13,5	12,3	14,5	11	12	13
Y, кг	0,7	0,73	0,75	0,7	0,65	0,7	0,6	0,7	0,8	0,7	0,7	0,65	0,7	0,8

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = 0,44; m_r = 0,26; $\bar{y}$ = 0,02x + 0,5.

5.30. Изучали зависимость между содержанием коллагена Y и эластина X в магистральных артериях головы (*г*/100 *г* сухого вещества, возраст 21-35 лет).

Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 12:

x_i	13	14,9	15,1	16,7	15,2	7,7	10	9,9	11	8,8	12	13,5
y_i	36	28	30	29	46	52	52,9	53	50	49	38	39

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = -0,83; m_r = 0,2; $\bar{y}$= -2,8x + 77.

5.31. Изучали зависимость между площадью поверхности тела Y ($м^2$) и ростом женщин X (*см*). Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 11:

x_i	157	169	155	168	152	152	169	152	152	154	161
y_i	1,74	1,74	1,67	1,51	1,52	1,55	1,58	1,58	1,44	1,67	1,42

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = 0,145; m_r = 0,33; $\bar{y}$ = 0,001x + 1,23.

5.32. Изучали зависимость между поверхностью Y ($мкм^2$) и диаметром X (*мкм*) сухого эритроцита у млекопитающих.

Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 13:

x_i	7,6	8,9	5,5	9,2	3,5	4,8	7,3	7,4	6,8	8	8,6	7,1	8,3
y_i	149	169	72	190	43	60	167	162	144	170	188	160	160

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

r = 0,95; m_r = 0,09; $\bar{y}$ = 28x -60.

6. Механические колебания и волны.

В организме человека протекают различные физиологические процессы, которые являются периодическими и представляют собой колебания определенных параметров.

Колебания наблюдаются при работе сердца, легких, мозга, кишечника, поверхности артерий при распространении по ним пульсовой волны в изменении температуры тела, кровяного давления и объема легких. Определение и анализ параметров периодических колебаний, протекающих в организме, являются важными показателями для правильной оценки функционального состояния организма, и постановки диагноза.

В зависимости от физической природы рассматриваемого процесса различают колебания: механические, электромагнитные, электромеханические и т. д. Мы будем рассматривать механические колебания.

6.1. Механические колебания

Механические колебания – движения, при которых тело повторяет свое положение через определенный интервал времени.

Колебания возникают в тех случаях, когда системе, способной совершать колебания, сообщается энергия.

В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колеблющуюся систему, различают свободные (или собственные) колебания и вынужденные колебания.

Свободные колебания – колебания, которые происходят под действием внутренних сил, равнодействующая которых направленна к положению равновесия. Они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии и отсутствии внешних и внутренних сил сопротивления. Примером таких колебаний могут быть пружинный и математический маятники.

Вынужденные колебания- колебания, которые возникают в системе под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Внешняя сила, действующая на материальную точку, изменяется со временем по закону:

$$F = F_0 \cos \omega t \qquad (6.1)$$

где ω - круговая частота колебаний вынуждающей силы, F_0 - ее амплитудное значение.

В случае приближения частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний колебательной системы амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой колебаний системы называется *резонансом,* а соответствующая частота вынуждающей силы, при которой возникает это явление – *резонансной частотой.*

График (Рис.6.1) зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы называется *резонансной кривой***.**

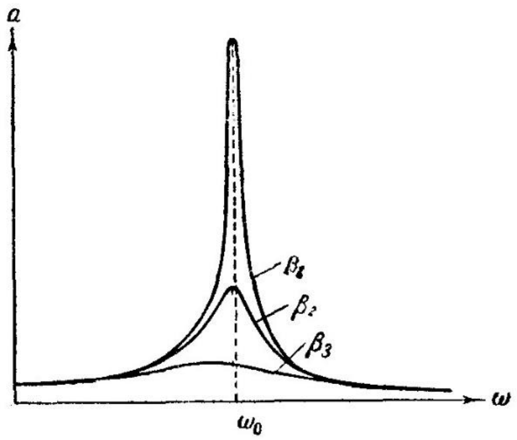


Рис.6.1 Резонансные кривые с разными коэффициентами затухания

Затухающие колебания- колебания, которые происходят с убывающей амплитудой из-за сил сопротивления в самой колебательной системе и сопротивления среды.

Амплитуда затухающих колебаний убывает со временем по экспоненциальному закону:

$$A=A_0e^{-\beta \cdot t} \qquad (6.2),$$

где A_0 – начальная амплитуда, β – коэффициент затухания**,** определяет быстроту убывания амплитуды колебаний.

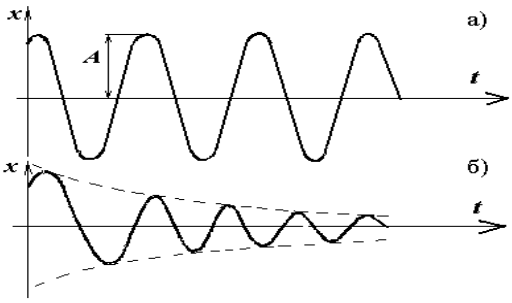


Рис. 6.2 График зависимости смещения от времени в случае а) свободных и б) затухающих колебаний.

В зависимости от формы колебаний рассматриваются гармонические и сложные колебания.

Гармонические колебания - колебания, при которых смещение тела от положения равновесия, скорость и ускорение изменяются со временем по закону синуса или косинуса.

Гармонические колебания происходят под действием возвращающей силы $F_{возв.}$, прямо пропорциональной смещению тела x и направленной к положению равновесия.

$$F_{возв.} = -k \cdot x \qquad (6.3)$$

Уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (6.4)$$

Основные параметры гармонических колебаний:

Смещение x определяет отклонение от положения равновесия в данный момент времени.

Амплитуда A **–** это модуль максимального смещения от положения равновесия: $A=|x_{max}|$.

Смещение и амплитуда в системе СИ измеряются в метрах. $[A]=[x]=$м

Период T – время одного полного колебания: $T=t/n$, где t – время, за которое совершено n колебаний.

Единица измерения периода колебаний – секунда**,** $[T]$=с.

Частота колебаний ν -показывает число колебаний за единицу времени, является величиной обратной периоду.

$$\nu=n/t; \ \nu=1/T$$

Частота колебаний измеряется в герцах. $[\nu]$=Гц=с$^{-1}$.

Циклическая (круговая частота) ω_0 - определяет число колебаний за 2π сек.

$$\omega_0=2\pi\nu=2\pi/T$$

Фаза колебания $\varphi=\varphi_0+\omega_0\cdot t$ - характеризует положение колеблющейся системы в любой момент времени, начальная фаза φ_0 – в начальный момент времени.

Фаза колебаний измеряется в радианах.

Сложное колебание - колебание, которое является периодическим, но не гармоническим. Такое колебание может быть разложено на простые гармонические колебания, частоты которых кратны частоте колебаний с наименьшей частотой. Это разложение называется гармоническим анализом, а график, на котором по оси абсцисс отложены частоты гармоник, а по оси ординат - соответствующие им амплитуды, представляет собой *гармонический спектр сложного колебания* (рис.6.3).

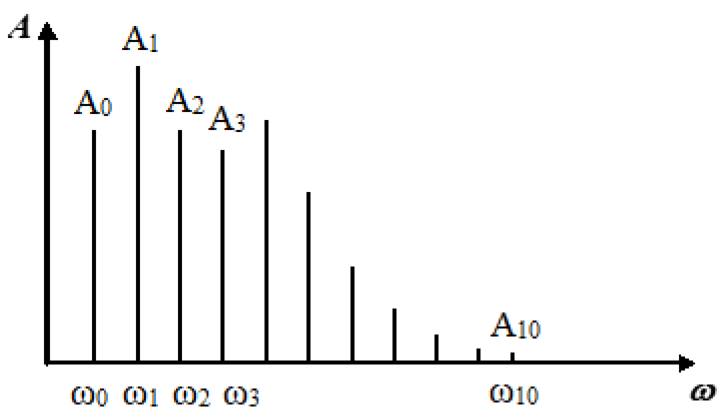


Рис. 6.3 Гармонический спектр сложного колебания

Определение гармонического спектра при анализе сложного колебания проводится с помощью специальных *анализаторов.*

Гармонические спектры, полученные с помощью этих приборов для таких, например сложных колебаний как ЭКГ (см. рис.6.4), ЭЭГ, сфигмограмма и др. являются диагностическими данными, позволяющими судить о работе органов и функциональных систем организма.

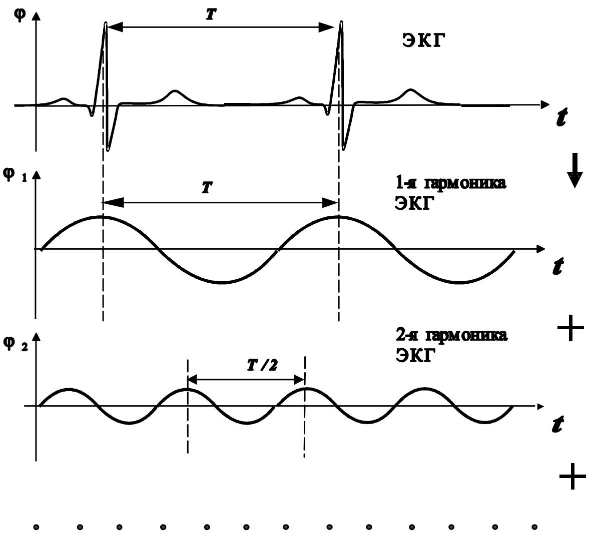


Рис. 6.4 Разложение ЭКГ в гармонический спектр

6.2. Механические волны. Уравнение механической волны

Механическая волна — это распространение колебаний в упругой среде.

При этом происходит распространение именно колебаний частиц среды, но сами частицы испытывают движения около своих положений равновесия.

Источником волны может быть любое колеблющееся тело.

Уравнение волны описывает зависимость смещения S частиц среды, участвующих в волновом процессе, от их координаты x и времени t:

$$S = f\,(x, t). \qquad (6.5)$$

Пусть волна распространяется вдоль оси *OX* (рис. 6.5).

В точке X_0 находится источник колебаний, смещение которого изменяется по закону: S = Acosωt. В некоторую в точку *X* волна придет с опозданием на время τ. Тогда смещение частиц в этой точке:

$$S(x) = A \cos [\omega (t - \tau)]. \qquad (6.6)$$

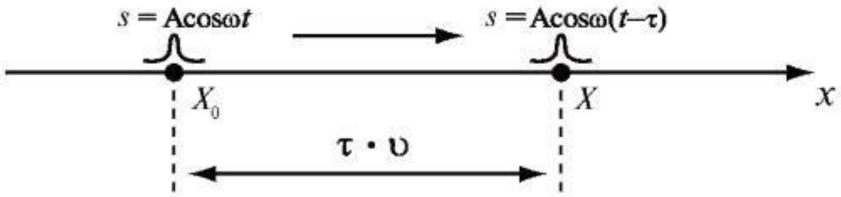


Рис. 6.5. Процесс распространения колебаний

Очевидно, что время запаздывания: $\tau = x/\upsilon$, где υ - скорость распространения волны. Тогда

$$S = A \cos [\omega (t - x/\upsilon)]. \qquad (6.7)$$

Где:

S - смещение от положения равновесия,

A - амплитуда,

ω - циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$,

$\omega (t - x/\upsilon)$ - фаза волны, определяет смещение частиц среды от положения равновесия,

t - время,

x - координата,

υ - скорость, с которой перемещается фаза волны (например, ее максимум).

Уравнение (6.7) называется уравнением плоской гармонической волны, которое позволяет определить смещение точек среды в зависимости от координаты и времени. На рис. 6.6 представлен график гармонической волны.

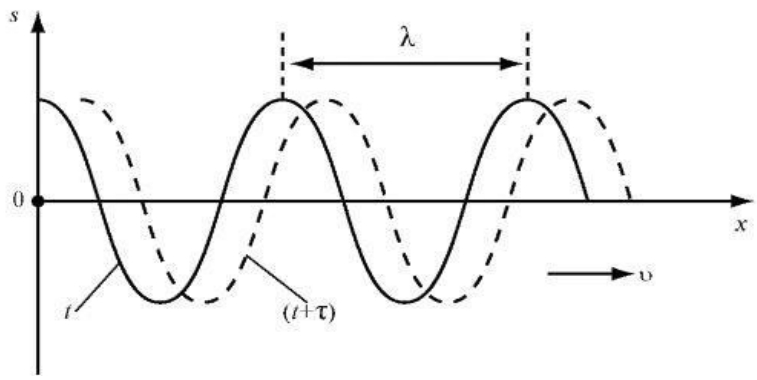


Рис. 6.6. График гармонической волны - зависимость смещения точек среды от координаты

Расстояние λ, на которое распространяется волна за время одного периода колебаний *T,* называется длиной волны:

$$\lambda = \upsilon T$$

Длину волны можно определить и как расстояние между двумя ближайшими точками, колеблющимися в одинаковых фазах.

Через время τ волна на графике сдвинется в направлении вектора скорости υ, как показано пунктиром.

Множество точек среды, имеющих в некоторый фиксированный момент времени одинаковую фазу, определяют *волновую поверхность*.

Классификация волн

В зависимости от направления колебаний частиц среды волны бывают поперечные и продольные.

Поперечные волны – волны, в которых частицы колеблются около положений равновесия перпендикулярно направлению распространения волны. Такие колебания обусловлены силами упругого взаимодействия, возникающими при деформации сдвига. Поперечные волны распространяются в твердых телах, на поверхности воды. Поперечную волну можно показать с помощью резинового шнура (рис.6.7, а).

Продольные волны – волны, в которых частицы среды колеблются около положений равновесия вдоль направления распространения волны (рис.6.7, б). При этом между частицами возникают силы упругого взаимодействия за счет деформации сжатия или растяжения. Продольные волны распространяются во всех средах кроме вакуума.

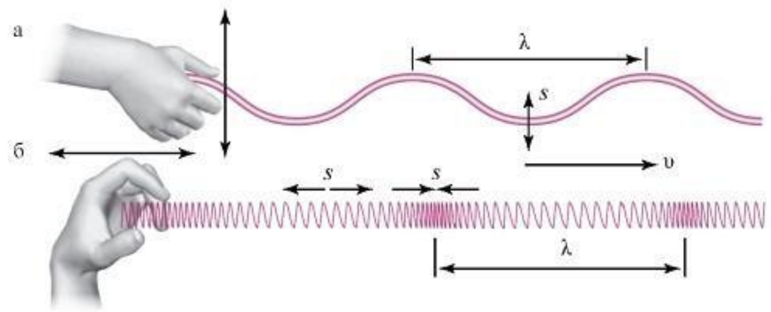


Рис. 6.7. Поперечная волна на резиновом шнуре (а) и продольная волна в пружине (б): υ - скорость распространения волны; s - смещение частиц среды; λ - длина волны; движения руки - источник колебания.

В зависимости от формы колебаний источника волны бывают *простые* (*гармонические*) и *сложные*.

Гармонические волны возникают от источника, совершающего гармонические колебания. Источник, совершающий периодические, но не гармонические колебания образует сложную волну.

В соответствии с характером распространения волн в пространстве различают *плоские****,*** *поверхностные* и *пространственные*.

Плоские волны возникают в случае плоского или удаленного источника.

У поверхностных и пространственных волн волновые поверхности представляют собой соответственно окружности (волны на поверхности воды) и сферы. Колебания, которые возникают в некоторой точке однородной, изотропной среды, распространяются от нее равномерно по всем направлениям, создают *сферическую волну*.

В процессе распространения волны важную роль выполняют источник колебаний и среда, по которой эти колебания распространяются:

- ✓ источник задает амплитуду A_o, частоту ω, период *T,* а также форму колебаний
- ✓ среда определяет скорость υ и длину волны λ. При переходе механической волны из среды с меньшей плотностью в среду с большей плотностью частота волны и период остаются неизменными, но при этом скорость волны и длина волны увеличиваются.

6.3. Энергетические характеристики волны

При движении волн происходит перенос энергии без переноса вещества.

Энергия (E), переносимая волной, включает в себя потенциальную энергию, обусловленную упругой деформацией среды, и кинетическую энергию всех колеблющихся частиц и определяется по формуле:

$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \qquad (6.8)$$

Единица измерения энергии - Дж.

Поток энергии (*Ф*) - *отношение энергии, перенесенной волной через некоторую поверхность, ко времени t, за которое этот перенос совершается*.

Если перенос энергии осуществляется равномерно, то:

$$Ф = E / t, \qquad (6.9)$$

а для общего случая поток представляет производную от энергии по времени -

$$Ф = dE / dt.$$

Единица измерения потока энергии совпадает с единицей мощности Дж/ с = Вт.

Интенсивность волны (или плотность потока энергии) (I) - *отношение потока энергии к площади S поверхности, расположенной* *перпендикулярно направлению распространения волны*. Для равномерного распределения энергии по поверхности, через которую проходит волна: $I=\Phi/S$, а в общем случае - $I = d\Phi / dS$. Измеряется интенсивность в Вт / м^2.

Интенсивность является физическим параметром волны, который определяет степень физиологического ощущения, возникающего под действием волнового процесса (например, звук или свет).

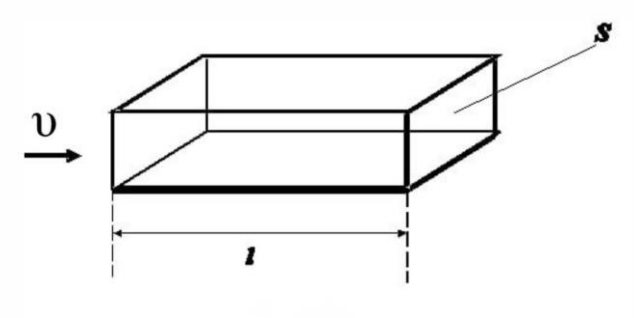


Рис. 6.8 Схема определения связи между интенсивностью и её скоростью

Представим участок среды, в которой распространяется волна в виде параллелепипеда длиной l. Площадь грани параллелепипеда, которая перпендикулярна направлению скорости волны υ, обозначим через S (см.рис.6.8). Введем объемную плотность энергии колебательного движения $\boldsymbol{w}$, представляющую количество энергии в единице объема: $\boldsymbol{w} = E / \boldsymbol{V}$. За время t через площадку S пройдет энергия, равная произведению величины объема $\boldsymbol{V} = l\,S = \upsilon\,t\,S$ на объемную плотность энергии:

$$E = w\,\upsilon\,t\,S \qquad (6.10)$$

Разделив левую и правую части формулы (6.10) на время и площадь, получим выражение, связывающее интенсивность волны и скорость ее распространения. Вектор, модуль которого равен плотности потока энергии волны, направленный в сторону переноса энергии волной, носит название **вектора Умова:**

$$\vec{I} = w\vec{\boldsymbol{\upsilon}} \qquad (6.11)$$

Вектор Умова (6.11) можно представить в несколько ином виде. Учитывая, что энергия гармонических колебаний определяется по формуле (6.8) и выразив массу m через плотность вещества ρ и объем $\boldsymbol{V}$, для объемной плотности энергии получим:

$$w = \frac{1}{2} pA^2\omega^2$$

Тогда формула (6.11) принимает вид:

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \rho A^2\omega^2 \boldsymbol{\vec{v}} \qquad (6.12)$$

Итак, интенсивность упругой волны, определяемая вектором Умова, прямо пропорциональна скорости ее распространения, квадрату амплитуды колебаний частиц и квадрату частоты колебаний.

В практических задачах используется понятие интенсивности волны. *Интенсивностью волны в данной точке среды называется среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимое волной:*

$$\mathrm{I} = \frac{E}{St}$$

6.4. Основные понятия акустики.

Акустика – наука о звуке, изучающая физическую природу звука и вопросы, связанные с его возникновением, распространением, восприятием и воздействием. Акустика исследует упругие колебания и волны от самых низких (от 0 Гц) до самых высоких частот (10^{13}Гц).

Изучение звука определяется тремя основными положениями:

а) должен существовать *источник* звука -колеблющееся тело, которое определяет физические характеристики звука.

б) среда, в которой энергия переносится от источника звука в виде *продольных звуковых волн,* определяет скорость распространения, затухание, отражение, преломление.

в) звук воспринимается органом слуха *ухом,* что определяет субъективное восприятие или регистрируется *прибором*.

Классификация механических волн по частотам

Звук – это упругие колебания и волны с частотами от 16 Гц до 20 кГц, которые воспринимаются органами слуха человека.

Инфразвук- механические волны с частотой ниже 16 Гц.

Ультразвук – волны с частотой 20 кГц–1ГГц.

На рис. 6.9 показано распределение механических волн на области звука, инфразвука и ультразвука в зависимости от значения их частоты, давления и интенсивности.

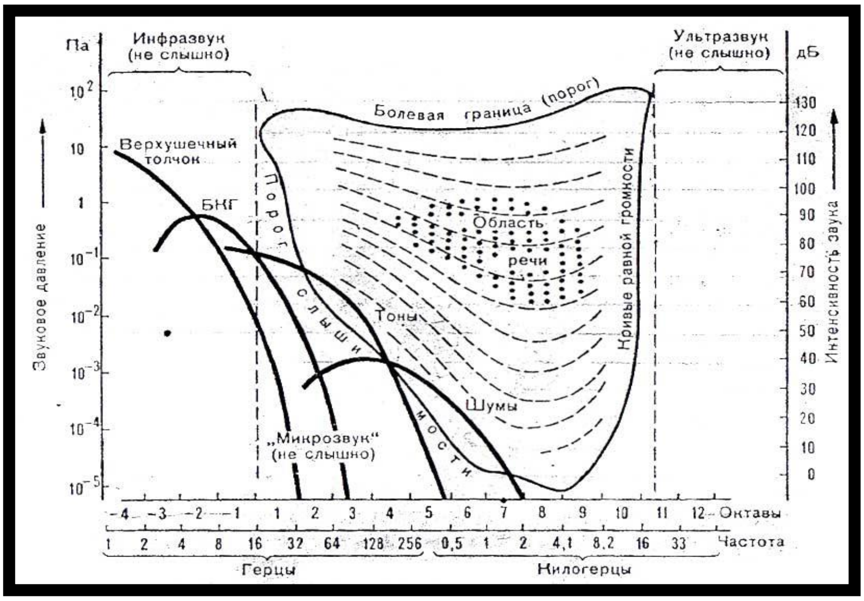
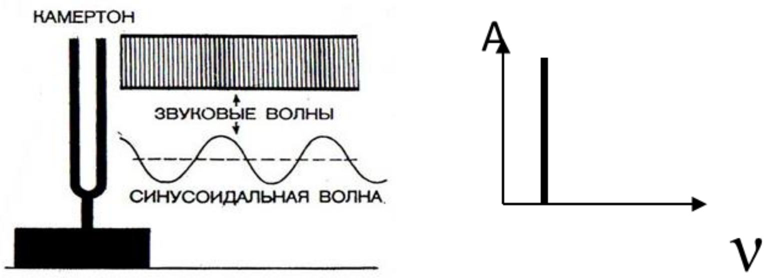


Рис. 6.9. Распределение механических волн на области инфразвука, звука и ультразвука

Виды звуков. Спектр звука

Чистый тон – звуки, которые создаются источником совершающем гармонические колебания. К ним относятся, например, звуки создаваемые камертоном или гласные звуки речи. Спектр чистого (или простого) тона представлен на рис. 6.10.



а) б)

Рис. 6.10 а) камертон- источник гармонических колебаний, б) спектр представлен одной гармоникой

Сложный тон – создается источником, совершающим периодические, но не гармонические колебания. Сложный тон может быть разложен на простые гармонические колебания с определенными амплитудами и частотами. Наименьшая частота такого разложения называется частотой ***основного тона***, остальные гармоники (***обертоны***) имеют частоты, кратные этой величине. Тон самой низкой частоты определяет общую высоту звука, обертоны определяют «окраску» (тембр) звука.

а) б)

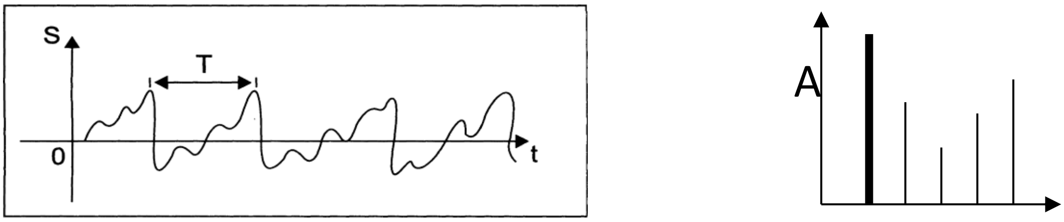


Рис. 6.11 а) сложное периодическое колебание с периодом T, б) линейчатый спектр сложного тона

Шумы – звуки, отличающиеся сложной временной зависимостью, представляют собой сумму сложных тонов с беспорядочно изменяющимися амплитудами и частотами. Спектр шума сплошной (рис. 6.12). К ним относятся согласные звуки речи, шум моря, множество техногенных звуков (образующихся при работе механизмов).

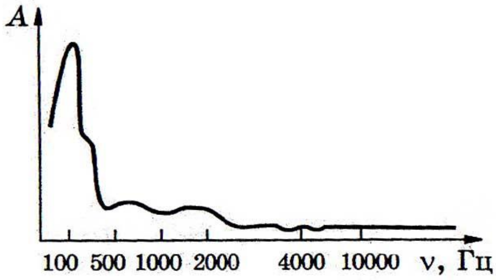


Рис. 6.12 Сплошной спектр шума

Для нормальной жизнедеятельности человека шум не должен превышать определенного порога. Так, для нормального сна и умственной деятельности шум не должен превышать 30 дБ; во многих учреждениях допускается шум до 55 дБ. Слабые шумы природного происхождения не только не вредны, но даже благотворно влияют на психику человека.

Интенсивный шум прежде всего отрицательно сказывается на работе Кортиева органа, приводя к повреждениям волосковых клеток. Причем первыми выходят из строя клетки, реагирующие на высокие частоты. Даже при кратковременном действии шума в 110 дБ временно снижается порог слуховой чувствительности на 10-15%. При длительном действии шума повреждения волосковых клеток становятся необратимыми.

Звуковые удары – кратковременные звуковые воздействия, например, в результате взрыва.

Акустическим спектром называют набор частот с указанием их относительной интенсивности звука.

Распространение звука.

Скорость распространения звука как механической волны зависит только от механических свойств среды и *не зависит от частоты*. Звуки распространяются в газах, жидкостях и твердых телах.

Скорость продольных звуковых волн в твердом теле c зависит от его плотности ρ и модуля упругости (модуля Юнга) E:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Скорость звука в жидкости зависит от плотности жидкости ρ и коэффициента сжимаемости жидкости *K*:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Скорость звука в твердых телах и жидкостях зависит также и от температуры, т. к. от температуры зависит плотность вещества.

Так, к примеру скорость звука в воздухе 340 м/с (20 ^{0}С), в воде 1500 м/с, крови 1540м/с, а в костной ткани, как более плотной, может достигать 4000м/с.

При прохождении звуков через границу двух сред они могут отражаться и преломляться, при этом законы отражения и преломления соответствуют законам для световых волн.

Важнейшей характеристикой среды, определяющей условия отражения и преломления, является **волновое сопротивление** *z* (акустический импеданс) - величина, равная произведению плотности среды ρ на скорость волны в среде**:**

$$z = \rho \cdot c \qquad (6.13)$$

Доля звуковой энергии, проходящей из одной среды в другую, зависит от соотношения акустических сопротивлений обеих сред.

Коэффициентом отражения *r* называют отношение интенсивностей отраженной и падающей волн. Коэффициент отражения определяет долю отраженной энергии.

$$r = \frac{I_{отр}}{I_{пад}} \qquad (6.14)$$

Коэффициентом проникновения звуковой волны β из одной среды в другую называют отношение интенсивностей прошедшей волны и падающей перпендикулярно на границу раздела сред:

$$\beta = \frac{I_{пр}}{I_{пад}} \qquad (6.15)$$

Звуковая волна (при нормальном падении) пройдет границу раздела двух сред без отражения при равенстве волновых сопротивлений двух сред (β=1, r=0, если $z_1=z_2$, т. е. $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$). Напротив, чем больше различаются между собой волновые сопротивления, тем меньшая доля звуковой энергии проникает через границу раздела. Так при переходе волны из воздуха в воду переходит всего 0,12% интенсивности падающего звука, а 99,88% отражается от границы раздела, т. е. происходит практически полное отражение.

При распространении звука (ультразвука) в среде его энергия убывает, так как происходит не только поглощение, но и отражение звука от границы раздела, а также рассеяние на элементах микроструктуры вещества. Свойство ультразвука отражаться на границе раздела сред с разными волновыми сопротивлениями положено в основу метода ультразвуковой диагностики.

6.5. Физические (объективные) характеристики звука.

Параметры волны, которые могут быть зарегистрированы и количественно измерены каким-либо прибором независимо от восприятия человеком, называются физическими или объективными.

Главными объективными характеристиками звука являются:

Ч*астота* звука ν - определяется частотой колебаний источника.

Звуковое давление Р. Под звуковым давлением понимают периодические изменения избыточного давления (сжатия и разрежения) в среде при распространении волны.

Интенсивность звука I - определяется энергией звуковой волны, переносимой в единицу времени через единицу площади в перпендикулярном направлении. Для плоской волны интенсивность связана со звуковым давлением зависимостью:

$$I = \frac{p^2}{2 \cdot \rho \cdot c} \qquad (6.16)$$

Уровень интенсивности звука. Человеческое ухо способно воспринимать звуки в широком диапазоне интенсивностей. Для частоты 1 кГц этот диапазон изменяется от I_0=10^{-12} Вт/м^2, или p_0=$2\cdot10^{-5}$ Па, что определяет *порог слышимости* на указанной частоте, до I_{max}=10 Вт/м^2, или p_0=60 Па -*порог болевого ощущения*. Эти величины различаются в 10^{13} раз, поэтому удобнее использовать логарифмическую шкалу, которая определяет величину уровня интенсивности звука, как десятичный логарифм отношения интенсивности исследуемого звука *I* к интенсивности I_0 на пороге слышимости:

$$L_Б = \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

(6.17)

Уровень интенсивности звука измеряют в системе СИ в белах (Б). 1 Бел – это единица шкалы уровней интенсивности звука, соответствующая изменению интенсивности в 10 раз, 2 Б – в 10^2раз и т. д. Обычно применяют меньшие единицы – децибелы (дБ), 1дБ=0,1Б. При их использовании уровень интенсивности определяется:

$$L_{ДБ} = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad (6.18)$$

Акустический спектр -определяет спектральный состав звука.

6.6. Характеристики слухового ощущения (субъективные характеристики звука).

Основными характеристиками восприятия звука человеком являются: **громкость, высота звука** и **тембр.** Эти характеристики в сильной степени зависят от индивидуальных особенностей каждого человека и поэтому являются субъективными.

Громкость звука характеризует уровень слухового ощущения, вызываемого этим звуком, и зависит от интенсивности, частоты, формы колебаний. Она связана с интенсивностью **психофизическим законом Вебера – Фехнера.**

Согласно этому закону, при увеличении интенсивности звука в геометрической прогрессии (*в одинаковое число раз*) его громкость возрастает в арифметической прогрессии (*на одинаковую величину*), то есть громкость звука пропорциональна логарифму его интенсивности.

Уровень громкости звука определяется по формуле:

$$E = k \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right), \text{ где } I_0 \text{ - порог слышимости} \qquad (6.19)$$

Единицами измерения уровня громкости являются **бел** (система СИ) и **фон** (внесистемная единица, соответствующая децибелу уровня интенсивности звука).

Значение коэффициента k существенно зависит от частоты и интенсивности звука. Условно считают, что при частоте 1 кГц k=1. В этом случае уровень интенсивности звука в децибелах численно совпадает с уровнем громкости в фонах.

$$E_Б = \lg\left(\frac{I}{I_0}\right), \qquad E_Ф = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (6.20)$$

При других частотах звука громкость можно измерить, сравнивая исследуемый звук со звуком частотой 1 кГц, который можно создать с помощью звукового генератора. Интенсивность этого звука подбирают такой, чтобы возникло слуховое ощущение, аналогичное ощущению громкости звука с частотой 1 кГц. Используя данную методику при обследовании людей с нормальным слухом, были получены стандартные кривые равной громкости (рис. 6.13) для различных частот, по которым можно найти соответствие между уровнем интенсивности звука определенной частоты и его громкостью. Кривая порога слышимости — это самая нижняя кривая на этих графиках. Самая верхняя кривая - болевой порог восприятия.

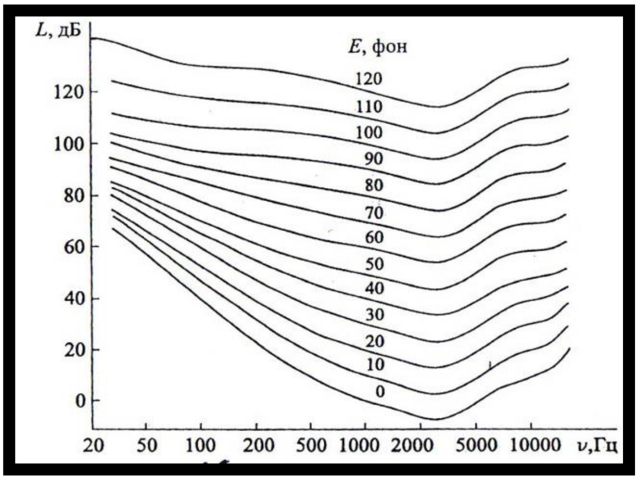


Рис. 6.13. Кривые равной громкости.

Звуки разной частоты и интенсивности воспринимаются ухом как звуки одинаково громкие, если попадают на эти кривые.

Высота звука — это характеристика звука, определяемая человеком субъективно, на слух, и зависит от частоты чистого тона или минимальной частоты для сложного тона. При увеличении частоты высота тона увеличивается.

Тембр - определяется акустическим спектром звука.

Так, например одна и та же нота, взятая на рояле и кларнете имеет одинаковый основной тон, но разные акустические спектры (Рис. 6.14), что воспринимается человеком как особый тембр.

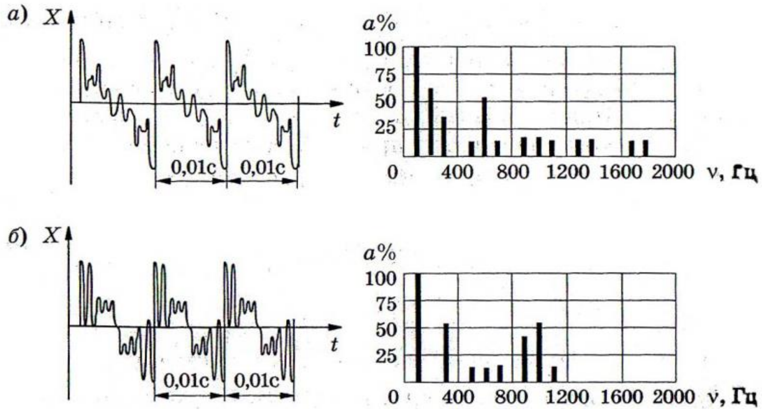


Рис. 6.14. Акустический спектр одинаковых нот на разных инструментах

Процесс восприятия человеком тембра сложных звуковых волн схематично представлен на рис. 6.15.

Сложное колебание, создаваемое музыкальным инструментом, распространяется в воздухе и попадает в слуховой аппарат человека. Здесь звуки преобразуются структурами наружного и среднего уха в колебания жидкости в улитке внутреннего уха. В свою очередь, колебания базилярной мембраны улитки заставляют сенсорные рецепторы уха, волосковые клетки, генерировать электрические сигналы.

Каждая волосковая клетка настроена только на определенную частоту колебаний жидкости. Таким образом происходит разложение сложного колебания на составляющие его гармоники в системе волосковых клеток. Гармонические спектральные составляющие по волокнам слухового нерва поступают в головной мозг, где они обрабатываются, и в результате создается слуховой образ.

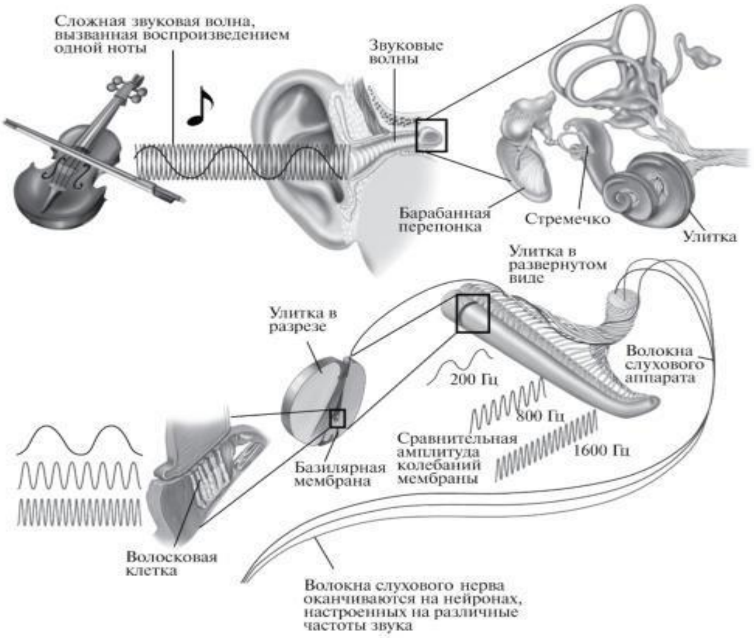


Рис. 6.15. Схема восприятия сложных тонов органом слуха

Надо отметить, что звуковые колебания из воздушной среды среднего уха попадают во внутреннее ухо, где находится жидкость и из-за большой разности акустических сопротивлений, большая часть энергии звуковых волн отражается. Согласование акустических сопротивлений между средним и внутренним ухом достигается благодаря строению и функциям среднего уха.

Среднее ухо, в частности слуховые косточки (молоточек, наковальня и стремечко), действует как своеобразный "трансформатор" при передаче колебаний от барабанной перепонки к овальному окну, усиливая их за счет рычажного сочленения. При этом звуковое давление, действующее на овальное окно, увеличивается ещё примерно в 22 раза, так как площадь барабанной перепонки (70-90мм^2) значительно больше площади овального окна (3.2 мм^2). Таким образом среднее ухо усиливает звуковое давление, передаваемое на жидкость во внутреннем ухе, компенсируя отражение звука от границы раздела воздух-жидкость.

Согласование акустических сопротивлений обеспечивает эффективную передачу звуковых волн, что определяет нормальный слух.

6.7. Акустические методы диагностики

Перкуссия (лат.Percussio-удар, простукивание)-метод исследования внутренних органов, основанный на простукивании по поверхности тела больного с последующей оценкой характера возникающих при этом звуков. Простукивание осуществляется молоточком (перкутером) по пластине, наложенной на тело (плессиметру). Перкуссию можно осуществлять также, постукивая пальцами правой руки по фалангам левой руки, наложенной на тело пациента.

В основе метода лежит то, что различные ткани, органы и образования в организме человека имеют разную плотность. Благодаря этому звук, получаемый при перкуссии, также имеет разную тональность. Например, при перкуссии сердца (плотной ткани) возникают высокие звуки, а при простукивании лёгких (ткани с низкой плотностью) — низкие. Исследование проводится с целью определения топографии внутренних органов, их физического и функционального состояния.

Аускультация-метод исследования внутренних органов, основанный на выслушивании звуковых явлений, возникающих при физиологической деятельности внутренних органов. Для этого в медицине используются стетоскоп, фонендоскоп и стетофонендоскоп.

Стетоскоп и фонендоскоп состоят из головки, двух резиновых трубок (звукопроводов) с наконечниками для передачи в ухо врача колебаний давления воздуха в корпусе головки. Различие между двумя медицинскими приборами состоит в строении головки: раструб фонендоскопа закрыт дополнительной мембраной. Стетоскоп позволяет выслушивать низкочастотные колебания. Применяется при измерении артериального давления, для прослушивания внутренних органов. Фонендоскоп позволяет лучше выслушивать высокочастотные звуки, используется для детального прослушивания легких, включая дыхательные шумы и хрипы. Он также применяется для точной диагностики сердечных шумов и тонов сердца. Наиболее распространен стетофонендоскоп — стетоскопическая головка служит для выслушивания низко- и среднечастотных, а фонендоскопическая — средне- и высокочастотных звуков. Внешне он практически идентичен фонендоскопу, но раструб имеет две стороны (одна с мембраной, другая без). Поворачивая его, доктор может выбрать «режим прослушивания».

6.8. Эффект Доплера.

Эффектом Доплера называется изменение частоты колебания (или длины волны), воспринимаемой наблюдателем, при движении источника колебаний и наблюдателя друг относительно друга. Допустим, наблюдатель движется по направлению к источнику волны с постоянной частотой $\nu_{ист}$. Однако благодаря сложению направленных навстречу друг другу скоростей испущенных волн $V_{ист}$ и наблюдателя $V_{набл}$, с точки зрения этого наблюдателя соседние волны будут разделены меньшим промежутком времени. Поэтому ему будет казаться, что волны имеют бОльшую частоту (или меньшую длину волны), чем в действительности. И наоборот, если наблюдатель будет удаляться от источника волн, то частота с точки зрения наблюдателя будет меньше, а длина волны – больше. Запишем общую формулу для величины воспринимаемой частоты $\nu_{набл}$:

$$\nu_{набл} = \frac{V_{зв} \pm V_{набл}}{V_{зв} \mp V_{ист}} \nu_{ист}$$

В этой формуле верхние знаки относятся к случаю сближения источника и наблюдателя, и нижние – к случаю их взаимного удаления.

Применительно к звуковым частотам эффект Доплера хорошо заметен для человеческого восприятия: звук сирены быстро приближающегося автомобиля или локомотива кажется нам более высоким, когда же источник звука проследовал мимо нас и начал удаляться, звук кажется нам заметно более низким.

Доплеровский сдвиг частоты — это разность между частотой волны, отраженной от подвижного объекта и частотой посланного сигнала.

Рассмотрим ситуацию, когда источник ультразвука излучает волны с частотой $\nu_{\text{ист}}$ в неподвижную среду, в которой со скоростью V_0 движется исследуемый объект. Этим объектом (как наблюдателем) частота этих волн воспринимается измененной вследствие эффекта Доплера. Затем волна отражается объектом в направлении неподвижного приемника, который также воспринимает уже другую частоту – таким образом, получается разница частот, значение которой определяется формулой:

$$\Delta v_{\text{Д}} = \frac{2 \cdot V_0}{V_{\text{ЗВ}}} v_{\text{ист}}$$

где $V_{ЗВ}$ – скорость движения механической волны в данной среде.

Доплеровский сдвиг частоты используется для определения скорости движения тела в среде, в том числе в медицинских исследованиях – например, для определения скорости движения клапанов и стенок сердца (доплеровская э*хокардиография*), других органов, скорости кровотока.

Тестовый контроль

6.1. Акустическими методами медицинской диагностики являются

A) перкуссия

B) рентгеновская томография

C) флюорография

D) аускультация

6.2. Аудиометрия – это метод измерения

A) уровня громкости шума.

B) тембра

C) спектра шума

D) остроты слуха

6.3. Высота звукового тона зависит от

A) частоты

B) интенсивности

C) акустического спектра

D) тембра

6.4. Громкость звука зависит от

A) частоты колебаний

B) скорости распространения

C) вида волны

D) уровня интенсивности

6.5. Гармонический спектр сложного колебания – это зависимость от частоты

A) амплитуды колебаний

B) коэффициента затухания

C) фазы колебаний

D) высоты тона

6.6. Звуки различаются по тембру, если они имеют разные

A) частоты

B) интенсивности

C) акустические спектры

D) громкости

6.7. Гармоническими колебаниями называют колебания, которые

A) затухают

B) не затухают

C) совершаются по закону синуса или косинуса

D) совершает тело

6.8. Диагностический метод, основанный на выслушивании звучания отдельных частей тела при их простукивании, называется

A) аускультацией

B) фонокардиографией

C) аудиометрией

D) перкуссией

6.9. Диагностический метод, основанный на выслушивания звуков, возникающих при деятельности внутренних органов, называется

A) перкуссией

B) фонокардиографией

C) аускультацией

D) аудиометрией

6.10. Единицей измерения уровня интенсивности звука является

A) фон

B) Паскаль

C) децибел

D) Вт/м2

6.11. Единицей измерения уровня громкости звука является

A) фон

B) Паскаль

C) децибел

D) Вт/м2

6.12. Звуковая волна из воздушной среды среднего уха попадает в жидкую среду внутреннего, поэтому среднее ухо выполняет функцию

A) передачи звуковых колебаний с барабанной перепонки на мембрану овального окна

B) согласования акустических импедансов внутреннего уха и воздуха

C) рецепторного звена слухового анализатора

D) усиления механических колебаний

6.13. Звук представляет собой механические волны с частотой

A) менее 16 Гц

B) от 16 Гц до 20 кГц

C) более 20 кГц

D) более 16 МГц

6.14. Порог слышимости зависит только от

A) акустического спектра

B) интенсивности звука

C) амплитуды колебаний

D) частоты и интенсивности

6.15. Порог слышимости звука на частоте 1 кГц равен

A) 10 Вт/м^2

B) 0 дБ

C)10^{-12}Вт/м^2

D) 0 Вт/м^2

6.16. Закон Вебера-Фехнера устанавливает связь между

A) громкостью и частотой

B) уровнем интенсивности и интенсивностью

C) громкостью и уровнем интенсивности

D) громкостью и интенсивностью

6.17. Уровень интенсивности звука частотой 1 кГц увеличился в 4 раза при этом уровень громкости увеличиться в

A) 16 раз

B) 2 раза

C) 4 раза

D) 8 раз

6.18. Какой зависимостью связаны между собой громкость и интенсивность звука

A) прямо пропорциональной

B) логарифмической

C) экспоненциальной

D) обратно пропорциональной

6.19. 1 Бел - это уровень интенсивности, при котором интенсивности сравниваемых волн

A) равны

B) отличаются в 100 раз

C) отличаются в 10 раз

D) отличаются в 130 раз

6.20. Ощущение, определяемое интенсивностью звука, называют

A) высотой

B) громкостью

C) тембром

D) тоном

6.21. Собственные колебания в реальной колебательной системе всегда являются

A) затухающими

B) гармоническими

C) незатухающими

D) сложными

6.22. Спектр сложного тона

A) сплошной

B) полосатый

C) линейчатый

D) непрерывный

6.23. Спектр чистого тона

A) сплошной

B) полосатый

C) линейчатый

D) представлен колебанием с определенной частотой

6.24. Спектр шума

A) сплошной

B) полосатый

C) линейчатый

D) представлен колебанием с определенной частотой

6.25. Субъективной характеристикой слухового ощущения звука является

A) высота

B) интенсивность

C) частота

D) тембр

6.26. Тембр определяется

A) интенсивностью

B) спектральным составом

C) звуковым давлением

D) громкостью

6.27. Первичный механизм действия инфразвука на организм – это воздействие

A) электрическое

B) резонансное

C) тепловое

D) химическое

6.28. Порог болевого ощущения воспринимаемых звуков определяется максимальным значением

A) уровня интенсивности

B) длины волны

C) интенсивности

D) частоты

6.29. Порог слышимости воспринимаемых звуков определяется минимальным значением

A) частоты

B) длины волны

C) интенсивности

D) скорости

6.30. При восприятии звука барабанные перепонки совершают колебания

A) собственные

B) вынужденные

C) гармонические

D) затухающие

6.31. При восприятии сложных тонов барабанные перепонки совершают колебания

A) собственные

B) вынужденные

C) гармонические

D) апериодические

6.32. При сближении источника и приемника ультразвука частота волны, воспринимаемая наблюдателем

A) уменьшается

B) становится равной нулю

C) не изменяется

D) увеличивается

6.33. При увеличении скорости кровотока доплеровский сдвиг частоты

A) уменьшается

B) становится равной нулю

C) не изменяется

D) увеличивается

6.34. При удалении источника ультразвука от наблюдателя частота, воспринимаемая наблюдателем

A) уменьшается

B) становится равной нулю

C) не изменяется

D) увеличивается

6.35. Произведение плотности среды на скорость звука в этой среде — это

A) волновое сопротивление

B) коэффициент отражения

C) акустический импеданс

D) коэффициент преломления

6.36. Доплеровский сдвиг частоты — это разность между частотой колебаний

A) наблюдателя и приемника

B) посланной и отраженной

C) приемника и наблюдателя

D) отраженной и посланной

6.37. Доплеровский сдвиг частоты может быть использован для определения

A) глубины расположения хрусталика

B) размеров хрусталика

C) плотности тканей

D) скорости движения объекта

6.38. Скорость кровотока и частота ультразвука увеличилась в 2 раза. Как при этом изменится доплеровский сдвиг частоты

A) уменьшится 4 раза

B) увеличится в 4 раза

C) не изменится

D) увеличиться в 8 раз

6.39. Доплеровская эхокардиография позволяет определить

A) форму объекта

B) скорость движения клапанов

C) размер объекта

D) скорость кровотока

6.40. Ультразвуком называются механические волны с частотой

A) менее 16 Гц

B) от 16 Гц до 20 кГц

C) более 20 кГц

D) более 16 Гц

6.41. В формуле описывающей уравнение механической волны отсутствует

A) скорость волны

B) длина волны

C) амплитуда

D) период

6.42. Зная скорость волны и частоту колебаний, можно рассчитать

A) длину волны

B) интенсивность

C) акустический импеданс

D) период

6.43. Зная значения частоты и скорости распространения ультразвука, можно определить

A) период и амплитуду

B) длину волны

C) амплитуда и длину волны

D) период

6.44. Для определения расстояния до границы раздела сред с разными волновыми сопротивлениями надо знать

A) частоту волны

B) скорость

C) акустический импеданс

D) время

6.45. Физической характеристикой звука является

A) высота звука

B) уровень интенсивности

C) тембр

D) частота

6.46. Единицей измерения уровня громкости звука является

A) фон

B) Паскаль

C) децибел

D) Вт/м2

6.47. Характеристикой слухового ощущения не является

A) высота звука

B) тембр

C) уровень интенсивности

D) уровень громкости

6.48. Частота основного тона акустического спектра

A) наибольшая

B) меньше 20 кГц

C) наименьшая

D) более 16 Гц

6.49. Частоты обертонов относительно основной частоты могут принимать значения

A) любые

B) меньше

C) больше

D) кратные основной частоте

6.50. Поток энергии увеличился в два раза, площадь перпендикулярная направлению потока увеличилась в 4 раза. Как при этом измениться плотность потока.

A) увеличиться в 8 раз

B) увеличится в 2 раза

C) уменьшиться в 2 раза

D) уменьшиться в 8 раз

6.51. Как измениться интенсивность звука, если звуковое давление уменьшиться в 3 раза

A) увеличиться в 3 раз

B) увеличится в 9 раз

C) уменьшиться в 9 раз

D) уменьшиться в 3 раза

6.52. Скорость ультразвука максимальна в ткани

A) жировой

B) костной

C) мышечной

D) легочной

Установите соответствие

6.53. Установите соответствие между физическими и субъективными характеристиками звука

Субъективные	Физические
А) Громкость Б) Тембр В) Высота	1) Частота 2) Скорость 3) Акустический спектр 4) Интенсивность

6.54. Уравнение механической волны имеет вид: $S = A \cos [\omega (t - x/\upsilon)]$

Установите соответствие между величинами и их физическим смыслом

Величина	Физический смысл
А) S	1) скорость волны
Б) A	2) время
В) ω	3) смещение частиц среды
Г) t	4) координата
Д) *x*	5) амплитуда
Е) υ	6) циклическая частота

6.55. Установите соответствие

Формула	Что определяет
А) $\Phi = E / t$	1) плотность потока энергии
Б) $I = \frac{E}{St}$	2) объемную плотность энергии волны
В) $w = \frac{1}{2} pA^2\omega^2$	3) поток энергии

Решите задачи

6.56. Координата колебаний частиц среды участвующих в распространении волны изменяется в пределах от 10 до 30 мм. Определите амплитуду колебаний.

6.57. Определите длину волны, если ее скорость равна 330 м/с, а частота колебаний 165 Гц.

6.58. На какой глубине находится объект, если посланный ультразвуковой сигнал был принят через 3 мс. Скорость ультразвука 1500 м/с.

6.59. Энергия в 100 Дж переносится в течение 5с через площадку площадью 20 м2, причем площадка ориентирована перпендикулярно направлению распространения волны. Значение интенсивности волны при этом равно…

6.60. Определите акустический импеданс среды с плотностью 10^3 кг/м^3 если скорость ультразвука в ней равна 1500 м/с.

6.61. На частоте 1 кГц интенсивность звукового сигнала увеличилась от порога слышимости в 10000 раз. Чему равен уровень интенсивности данного сигнала. Ответ выразить в дБ.

6.62. Скорость распространения звука в воздухе 340 м/с. Частота звука 20 Гц. Определите длину волны звука в воздухе.
6.63. Интенсивность звука частотой 1 кГц равна 10^{-5} Вт/м^2. Определите уровень громкости звука.

6.64. Частота сердечных сокращений 120 ударов в минуту. Чему равен период одного сердечного сокращения.

6.65. Интенсивность звука увеличивается от 10^{-10} до 10^{-8} Вт/м^2. На сколько увеличится уровень громкости, если частота равна 10^3 Гц. Ответ дать в фонах.

6.66. На границу раздела двух сред падает ультразвуковая волна интенсивностью 10^4 Вт/м^2. Интенсивность волны, прошедшей во вторую среду, равна $0{,}3 \cdot 10^4$ Вт/м^2, оставшаяся интенсивность соответствует отраженной от границы раздела волне. Чему равен коэффициент отражения.

6.67. Уровень интенсивности равен 20 дБ. Величина интенсивности увеличилась в 1000 раз. Каким станет уровень интенсивности.

6.68. Определите скорость кровотока в аорте, если доплеровский сдвиг частоты равен 1,9 кГц, скорость ультразвука 1540 м/с, частота генератора ультразвуковой волны 3 МГц. Ответ округлить до десятых.

6.69. Скорость звука в воде 1500 м/с, давление, создаваемое волной 10 Па. Чему равна интенсивность волны.

6.70. Источник, излучающий волну с частотой 12 кГц, приближается к неподвижному наблюдателю со скоростью 100 км/час. Определите частоту звука, воспринимаемого наблюдателем, если скорость звука равна 340 м/с. Ответ выразить в кГц.

6.71. Во сколько раз увеличится акустическое сопротивление при переходе ультразвуковой волны из воздуха с плотностью 1,5 кг/м^3 в воду. Скорость волны в воздухе и воде соответственно равна 340 м/с и 1500 м/с. Ответ округлить до целых.

6.72. Определите минимальную длину звуковой волны в воде, если его скорость в данной среде 1500 м/с. Ответ выразить в см.

6.73. Интенсивность волны, падающей на границу раздела сред равна 10^4 Вт/м^2. Чему равен коэффициент проникновения, если интенсивность отраженной волны $0{,}2 \cdot 10^4$ Вт/м^2.

6.74. Во сколько раз увеличиться плотность потока энергии, если поток энергии увеличится в 4 раза, а площадь поверхности, через которую происходит перенос энергии, увеличится в 2 раза.

6.75. Как изменится интенсивность волны, если энергия, переносимая волной уменьшиться в 2 раза, а площадь, через которую переносится энергия, уменьшится в 4 раза.

6.76. Определите частоту, воспринимаемую наблюдателем в случае сближения наблюдателя и источник звука с соответствующими скоростями 20 м/с и 40 м/с. Частота источника звука 2 кГц, скорость звука в воздухе 340 м/с.

7. Элементы биореологии

7.1. Закон вязкости Ньютона

Гемодинамика – наука, изучающая законы движения крови по сосудистой системе.

В реальных жидкостях между молекулами присутствует внутреннее трение, являющееся причиной диссипации энергии, то есть превращения кинетической энергии упорядоченного движения слоев жидкости в энергию теплового движения молекул. Между соприкасающимися слоями жидкости возникают силы сопротивления сдвигу (силы внутреннего трения), направленные вдоль границы раздела слоев. Свойство жидкости сопротивляться сдвигу или скольжению одних слоев жидкости относительно других называется вязкостью.

Рассмотрим течение реальной жидкости, заключенной между двумя параллельными пластинами, линейные размеры которых значительно превосходят расстояние между ними h (рис. 7.1, а). Одна пластина неподвижна, другая движется с постоянной скоростью v_0 под действием приложенной силы $\boldsymbol{F}$.

Мысленно разобьем жидкость между пластинами на параллельные горизонтальные слои. Слои, соприкасающиеся с пластинами, будем считать движущимися с теми же скоростями, что и сами пластины. Тогда самый нижний слой будет покоиться, а верхний – двигаться со скоростью v_0. На верхний слой жидкости со стороны пластины действует сила $\boldsymbol{F}$, сонаправленная с ее скоростью. Поскольку пластина движется без ускорения, то (согласно первому закону Ньютона) действие этой силы уравновешивается равной ей по модулю противоположно направленной силой, которой, очевидно, является сила трения $F_{тр}=F$, действующая на пластину со стороны прилегающего к ней слоя. Аналогичное действие сил сверху и снизу будет испытывать каждый слой жидкости.

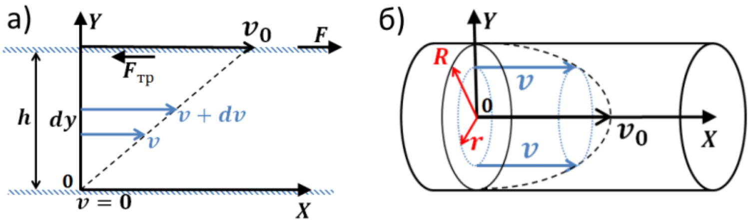


Рис. 7.1 Схематичное изображение движения вязкой жидкости между пластинами (а) и по цилиндрической трубе (б)

Рассмотрим два произвольных слоя жидкости, отстоящих друг от друга на малое расстояние dy. Пусть нижний слой движется со скоростью v, а верхний - со скоростью $v{+}dv$, тогда скорость второго слоя относительно первого будет dv. Величина, показывающая, как быстро меняется относительная скорость этих слоев в направлении, перпендикулярном их движению (вдоль оси *Y*), называется градиентом скорости или скоростью сдвига:

$$grad(v) = dv/dy \quad (7.1)$$

Единицы измерения скорости сдвига: $[grad(v)] = \frac{[dv]}{[dy]} = \frac{\text{м}/\text{с}}{\text{м}} = \text{с}^{-1}$.

В рассматриваемом случае равномерного движения жидкости между пластинами скорость сдвига имеет вид:

$$grad(v) = \frac{v_0 - 0}{h} = \frac{v_0}{h} \quad (7.2)$$

Опыт показывает, что сила внутреннего трения $F_{тр}$ между слоями движущейся жидкости прямо пропорциональна скорости сдвига и площади поверхности соприкасающихся слоев *S*:

$$\text{F}_{\text{тр}} = \eta \frac{dv}{dy} \text{S} \quad (7.3)$$

Коэффициент пропорциональности η называется коэффициентом динамической вязкости или просто вязкостью.

Это соотношение было установлено Ньютоном в 1713 году и известно как **закон вязкости Ньютона**.

Часто закон вязкости записывают несколько иначе. Для этого введем величину, называемую напряжением сдвига σ и характеризующую силу трения между единичными площадями соприкасающихся слоев: $\sigma = \frac{F_{\text{тр}}}{S}$. Напряжение сдвига используется в реологии – разделе гемодинамики, изучающей свойство текучести крови и ее элементов, и является важной реологической характеристикой. Единицы измерения напряжения сдвига – паскали.

В реологических характеристиках закон вязкости Ньютона примет вид:

$$\sigma = \eta \frac{dv}{dy} \quad (7.4)$$

Таким образом, напряжение сдвига прямо пропорционально скорости сдвига.

На основании (7.4) можно дать определение коэффициента вязкости (его физический смысл): коэффициент динамической вязкости численно равен напряжению сдвига величиной в 1 Па, возникающему между соприкасающимися слоями жидкости, при градиенте скорости, равном единице. Единицы измерения вязкости: $[\eta] = \left[\frac{\sigma}{grad(v)}\right] = \text{Па} \cdot \text{с}$ («паскаль-секунда»). Величину, обратную динамической вязкости, называют текучестью.

Наряду с динамической вязкостью η часто рассматривают так называемую кинематическую вязкость ν, вычисляемую по формуле:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (7.5)$$

где ρ – плотность жидкости. Единицы измерения кинематической вязкости: $[\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Для графического изображения изменения скорости слоев жидкости используется профиль скорости. Он показывает, как меняется направление и модуль скоростей слоев на различных глубинах вдоль вертикального направления. Для построения профиля скорости нужно рассмотреть скорости частиц, принадлежащих различным слоям и находящимся на одном поперечном сечении. Профилем скорости будет поверхность, на которой лежат окончания векторов скоростей этих частиц. Например, профиль рассмотренного выше течения жидкости между двумя пластинами – это плоскость, наклоненная под определенным углом к горизонтали (тангенс угла наклона к оси X, как нетрудно увидеть из рисунка 7.1, будет равен $\frac{h}{v_0}$). В направлении *Y*, перпендикулярном к пластинам, скорость слоев жидкости будет изменяться по линейному закону:

$$v(y) = \frac{v_0}{h} y \qquad (7.6)$$

Таким образом, профиль скорости вязкой жидкости, заключенной между движущимися пластинами – линейный.

Перейдем к рассмотрению движения жидкости в цилиндрической трубе. При малых скоростях ее скорость зависит от квадрата расстояния от оси трубы r:

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (7.7)$$

Таким образом, профиль течения жидкости в трубе – параболический (рис. 7.1, б). Из формулы видно, что в граничащем со стенками трубы слое скорость будет равна нулю $v(r = R) = 0$, а на оси цилиндра скорость будет максимальна: $v(r = 0) = v_0$.

7.2. Ньютоновские и неньютоновские жидкости

В соответствии с характером зависимости вязкости от скорости сдвига все реальные жидкости можно разделить на два больших класса. К первому классу относятся жидкости, у которых η не зависит от $|grad(v)|$ и изменяется только в зависимости от температуры и давления. Такие жидкости характеризуются пропорциональной зависимостью σ и $\frac{dv}{dy}$, то есть подчиняются уравнению Ньютона (7.4) и поэтому называются ньютоновскими. Ньютоновские жидкости – это, как правило, однородные по строению жидкости, например, вода, спирт, плазма и сыворотка крови, лимфа. На рис. 7.2а изображены кривые вязкости, иллюстрирующие связь между η и $|grad(v)|$. На рис.7.2б представлены кривые течения, которые показывают связь между σ и $|grad(v)|$. Ньютоновским жидкостям на данных графиках соответствует линия 1.

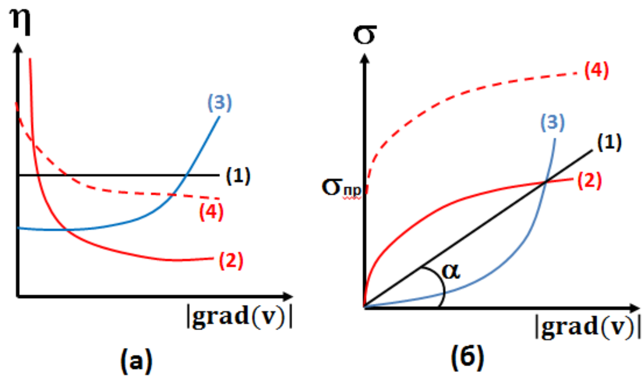


Рис. 7.2 Кривые вязкости (а) и кривые течения (б) для ньютоновских (линии 1) и неньютоновских жидкостей (линии 2-4)

Так как кривые течения ньютоновской жидкости подчиняются уравнению прямой: $\sigma = \eta|grad(v)|$, то коэффициент вязкости η можно представить как тангенс угла наклона кривой течения: $\eta = \frac{\sigma}{|grad(v)|} = tg(\alpha)$.

Второй класс включает жидкости, вязкость которых так или иначе зависит от скорости сдвига (кривые 2-4 на рис. 7.2). Они подразделяются на три вида. Псевдопластичные жидкости – это жидкости, у которых вязкость уменьшается при росте скорости сдвига (линии 2). Примерами могут служить майонез или кетчуп, которые становятся более текучими при размешивании. К псевдопластичным жидкостям относится кровь. Дилатантные жидкости – это неньютоновские жидкости, вязкость которых увеличивается при увеличении скорости сдвига (линии 3). Ярким примером таких жидкостей является раствор крахмала в воде. Когда смесь медленно выливается, она обладает высокой текучестью, но густеет, если начать ее быстро перемешивать. Третьим типом неньютоновских жидкостей являются так называемые жидкости Шведова-Бингама, или вязкопластичные жидкости. Они отличаются от псевдопластичных тем, что имеют предел текучести $\sigma_{\text{пр}}$, то есть минимальное напряжение сдвига, которое необходимо приложить, чтобы жидкость стала течь (линии 4). К вязкопластичным жидкостям относятся масляные краски, которые, будучи нанесенными на стену, не стекают с нее, что демонстрирует наличие предела текучести, и, например, сливочное масло, к которому необходимо приложить определенную силу, чтобы нанести на хлеб.

7.3. Факторы, влияющие на вязкость крови

Рассмотрим основные факторы, влияющие на вязкость крови в организме.

а) Температура. Изменение температуры одинаково влияет на вязкость обоих типов жидкости – как ньютоновской, так и неньютоновской: при повышении температуры вязкость снижается. При заболеваниях, связанных с повышением температуры, снижение вязкости крови играет защитную роль для сердечной мышцы, облегчая нагрузку на нее. В переохлажденных участках тела вязкость, наоборот, повышается, что затрудняет кровоток. Однако следует учесть, что повышение температуры также влияет на степень агрегации эритроцитов (см. ниже) и вызывать другие изменения в структуре крови. Поэтому температурные изменения вязкости достаточно сложны.

б) Форма и размер эритроцитов. Для оценки вязкости крови используется гематокрит - показатель, выражающий соотношение объема эритроцита к объему крови, в которой он находится. В норме он равен 0.4. Таким образом, изменение объема эритроцита влияет на гематокрит и, следовательно, что является следствием изменения вязкости крови. Вязкость венозной крови выше, чем артериальной, так как эритроциты в венах имеют сферическую форму и больший объем, а в артериях - форму тора и меньший объем.

в) Способность эритроцитов к деформации. Некоторые капилляры имеют диаметр, меньший, чем диаметр эритроцита (средний диаметр эритроцита – 8 мкм, а капилляра – 5-10 мкм). Для того, чтобы преодолеть такие узкие капилляры, эритроцит деформируется и приобретает сферическую форму, что также повышает вязкость. После прохождения узкого участка форма эритроцита восстанавливается.

г) Особенности движения крови в различных сосудах. Скорость крови и диаметр сосудов в различных участках сердечно-сосудистой системы различаются очень сильно. Следовательно, изменяется и скорость сдвига $|grad(v)|$. Как было сказано ранее, для крови характерна обратная зависимость между вязкостью и скоростью сдвига, причем для малых скоростей сдвига ($|grad(v)| < 1\ c^{-1}$ см. рис. 7.3, а) скорость уменьшения вязкости значительно сильнее, чем при больших скоростях сдвига ($|grad(v)| \geq 100\ c^{-1}$), где вязкость можно приблизительно считать постоянной и равной своему среднему значению $\eta = 4 - 5$ Па $\cdot$ с.

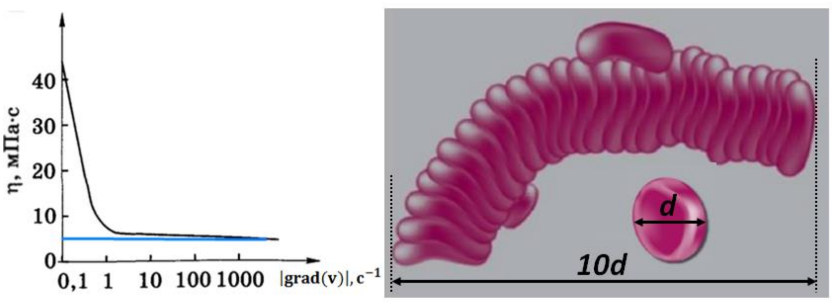


Рис. 7.3 (а) Кривая вязкости крови. Горизонтальная прямая лежит на уровне $4 - 5$ Па $\cdot$ с, что соответствует среднему значению вязкости для крови в крупных сосудах; (б) относительные размеры отдельного эритроцита (d $\approx$ 8 мкм) и «монетного столбика»

д) Склонность к агрегации. Относительно высокие значения η при малых $|grad(v)|$ объясняются свойством эритроцитов образовывать агрегаты.

Если нанести мазок крови на предметный столик микроскопа, то можно видеть, как эритроциты «склеиваются» друг с другом, образуя агрегаты, которые получили название «монетные столбики», характерные размеры которых превышают диаметр отдельного эритроцита примерно в 10 раз (рис. 7.3, б). Условия образования агрегатов различны в крупных и мелких сосудах.

е) Наличие двойного электрического слоя. Поверхность эритроцитов заряжена отрицательно. Вследствие этого между эритроцитами существует электростатическое отталкивание, обеспечивающееся кулоновскими силами, что является важным фактором, препятствующим их агрегации (слипанию) и поддерживающим вязкость крови в норме. Как известно, заряженную частицу, на поверхности которой возникли потенциал-образующие ионы, окружают два слоя противоионов – адсорбционный и диффузионный (см. рис. 7.4). Таким образом, отрицательный заряд эритроцита приводит к появлению вблизи него положительно заряженных ионов плазмы и образованию двойного электрического слоя. При движении частицы в диффузионном слое ближе к границе раздела с адсорбционным слоем возникает электрокинетический потенциал (или дзета-потенциал). Оценку вязкости крови можно проводить, определяя величину дзета-потенциала эритроцитов, который в норме должен быть постоянным и составлять примерно -30 мВ.

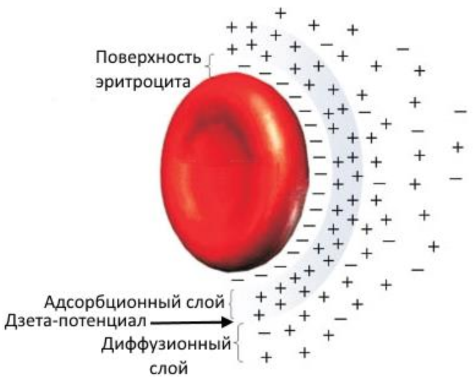


Рис.7.4 Двойной электрический слой эритроцита

7.4. Режимы течения

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется ламинарным (слоистым), если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и турбулентным (вихревым), если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости. При турбулентном течении частицы жидкости совершают неупорядоченные хаотические движения по сложным траекториям и возникают завихрения.

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. С увеличением скорости движения жидкости вследствие неоднородности давления вдоль поперечного сечения трубы ламинарное течение может в некоторый момент перейти в неупорядоченное турбулентное течение.

Режим течения жидкости характеризуется безразмерным коэффициентом (числом Рейнольдса), который при движении жидкости в круглой трубе определяется формулой:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} \qquad (7.8)$$

Где v- средняя скорость течения жидкости в трубе, ρ - плотность жидкости, d - диаметр трубы, η - коэффициент динамической вязкости. Существует критическая скорость, при которой происходит переход от ламинарного течения к турбулентному. Критическое значение числа Рейнольдса зависит от вида течения, коэффициента вязкости жидкости, температуры, давления. Для воды $Re_{\text{кр}} = 2300$, для крови $Re_{\text{кр}} = 970 \pm 80$.

Число Рейнольдса может служить критерием подобия для течения жидкостей в трубах, каналах и т.п. Если рассчитанное число Рейнольдса для рассматриваемой системы окажется большим своего критического значения ($\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$), то режим течения жидкости считается турбулентным, если меньшим ($\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$), то течение считается ламинарным.

Движение крови в организме в основном ламинарное. Однако, анализируя формулу (7.8), можно заключить, что переход к турбулентности возможен в ряде случаев: а) в полостях сердца и аорте (велико значение d); б) вблизи клапанов (большая скорость v); в) при различных патологиях, приводящих к снижению вязкости крови; г) при патологиях, приводящих к изменению сечения сосуда, например, при атеросклерозе. Образование атеросклеротических бляшек в сосуде создает препятствие току крови и приводит к возникновению турбулентного течения.

В разделе 7.1 при рассмотрении течения жидкости в трубе предполагалось, что течение ламинарное. Поэтому профиль скорости жидкости при ламинарном течении имеет параболический вид (рис. 7.5, б). При турбулентном течении вследствие хаотического движения частиц жидкости для построения профиля скорости принято использовать не мгновенные, а средние значения скоростей частиц. Профиль скорости при турбулентном режиме течения имеет более плоскую форму вблизи оси трубы и более интенсивную скорость роста у стенок (рис. 7.5, в). Для идеальной жидкости вследствие отсутствия внутреннего трения между самими молекулами и между молекулами и стенками трубы все частицы жидкости движутся с одинаковой скоростью и профиль скорости имеет вид вертикальной прямой (рис. 7.5, а).

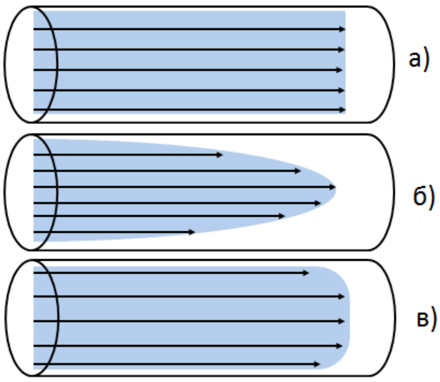


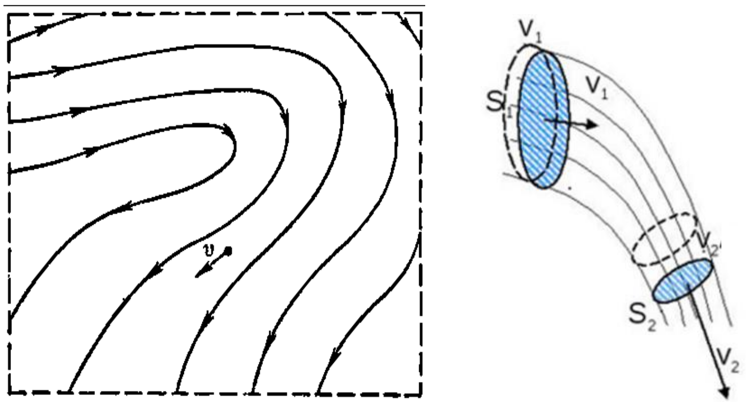
Рис. 7.5 Профили течения для различных типов жидкостей: а) идеальной, б) реальной (ламинарное течение), в) реальной при турбулентном режиме течения

7.5. Стационарный поток

Проследим, что происходит с течением времени в текущей жидкости в каждой точке пространства. Укажем величину и направления скоростей различных частиц жидкости. Если рассмотреть все возможные точки пространства, но фиксировать время, то получится мгновенная картина распределения скоростей жидкости – поле скоростей (рис.7.6, а). Линия, касательная к которой указывает направление скорости частицы жидкости, проходящей в рассматриваемый момент времени через точку касания, называется линией тока.

Различают установившееся (стационарное) и неустановившееся (нестационарное) движение жидкости. Стационарное течение — это течение, при котором скорость жидкости в каждой данной точке остается постоянной во времени и зависит только от расположения данной точки в пространстве. Элементы жидкости приходят и уходят, но в данной точке каждый вновь пришедший элемент приобретает ту скорость, которая этой точке соответствует. Пример стационарного течения – течение жидкости по трубе с заданным перепадом давлений на ее концах. Нестационарное движение – это такое движение, когда скорость в каждой точке меняется с течением времени. Примером нестационарного течения является течение жидкости в трубе при открытии и закрытии крана, при перегибании шланга с водой и т. д. Для стационарного течения поле скоростей, а следовательно, форма и расположение линий тока, со временем не изменяются.

Возьмем произвольный замкнутый контур бесконечно малого сечения и через каждую его точку в один и тот же момент проведем линии тока. Они расположатся на некоторой трубчатой поверхности, называемой трубкой тока (рис. 7.6, б). Так как поперечное сечение трубки бесконечно мало, то можно считать, что скорость жидкости одна и та же во всех точках одного и того же поперечного сечения и направлена вдоль оси трубки тока.



а) б)

Рис. 7.6. а) поле скоростей; б) трубка тока жидкости переменного сечения

Выделим в трубке тока два сечения с площадями S_1 и S_2. Пусть скорости течения через эти уровни равны соответственно v_1 и v_2. Масса жидкости, проходящая за время Δt через первое сечение, будет равна $m_1 = \rho_1 \Delta V_1$, через второе $m_2 = \rho_2 \Delta V_2$, где ρ_1 и ρ_2 – плотности, $\Delta V_1 = v_1 S_1 \Delta t$ и $\Delta V_2 = v_2 S_2 \Delta t$ – объемы протекающей жидкости в первом и втором сечении соответственно. Для стационарного течения должен выполняться закон сохранения массы, выражающий равенство массы жидкости, протекающей через сечения S_1 и S_2:

$$m_1 = m_2 \qquad (7.9)$$

Для несжимаемой жидкости плотность постоянна: $\rho_1 = \rho_2$, поэтому закон неразрывности потока для несжимаемой жидкости можно записать в следующем виде: $v_1 S_1 \Delta t = v_2 S_2 \Delta t$. То есть, при стационарном течении через каждый уровень поперечного сечения за рассматриваемый промежуток времени Δt протекает одинаковый объем жидкости. Сократив на время, получаем:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = const \qquad (7.10)$$

Соотношение (7.10) называется уравнением неразрывности потока. Из него видно, что скорость течения жидкости больше в тех точках, где поперечное сечение меньше, и наоборот.

При течении жидкости, помимо линейной скорости частиц v, вводят также понятие объемной скорости, или расхода. Объемная скорость (расход) Q - это величина, равная объему жидкости, протекающему через поперечное сечение в единицу времени:

$$Q = \frac{V}{t} \quad (7.11)$$

Единицы измерения объемной скорости - $\text{м}^3/\text{с}$. Поочередно подставляя в формулу (7.11) выражения для объемов ΔV_1 и ΔV_2, получаем объемные скорости через первое и второе сечения: $Q_1 = v_1 S_1$ и $Q_2 = v_2 S_2$. Тогда уравнение неразрывности потока может быть записано в следующем виде:

$$Q_1 = Q_2 = const \qquad (7.12)$$

Закон неразрывности потока действует как для идеальных, так и для реальных жидкостей, обладающих внутренним трением (вязкостью). В частности, этот закон справедлив и в гемодинамике для описания движения крови по сосудам. Поскольку в сердечно-сосудистой системе циркулирует постоянный объем крови, можно считать, что средняя объемная скорость во всех отделах сосудистой системы будет постоянной. Поэтому уравнение неразрывности потока для гемодинамики формулируется следующим образом: в любом сечении сердечно-сосудистой системы объемная скорость кровотока одинакова. Под площадью сечения понимается суммарная площадь сечения кровеносных сосудов одного уровня ветвления (уровень ветвления на рис. 7.7, б – это любая пунктирная линия). Учитывая, что суммарная площадь просвета всех капилляров $S_{\text{кап}}$ намного больше площади сечения аорты $S_{\text{аор}}$ (примерно в 500 раз: $S_{\text{кап}} \approx 500 \cdot S_{\text{аор}}$, рис. 7.7, а), можно заключить, что скорость в капиллярах будет примерно в 500 раз меньше, чем в аорте (рис.7.7, в).

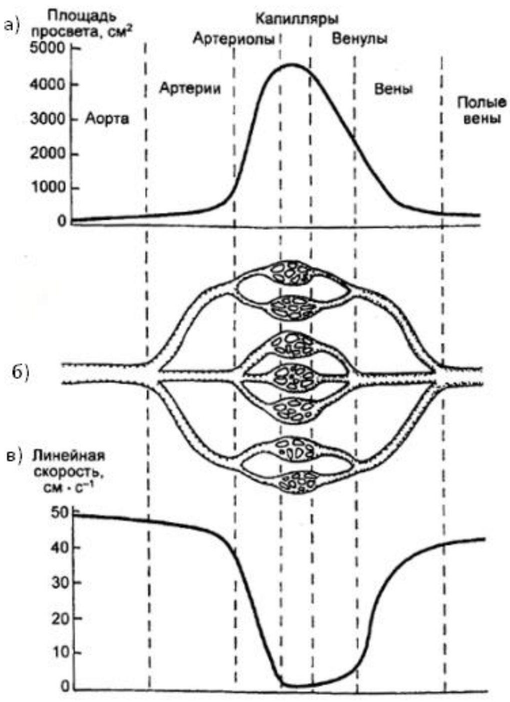


Рис. 7.7 График изменения скорости кровотока (в) при изменении площади просвета сосудов (а)

7.6. Формула Пуазейля

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости, протекающей стационарно по горизонтальной цилиндрической трубе постоянного сечения, на концах которой поддерживается разность давлений (рис.7.8).

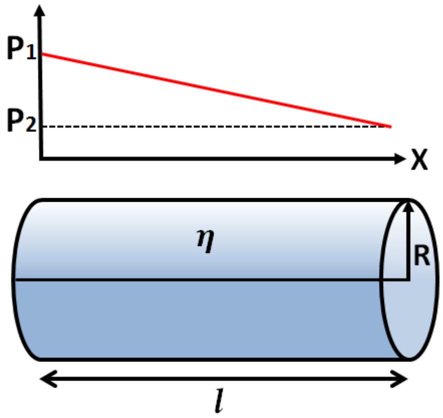


Рис. 7.8 Иллюстрация к определению закона Пуазейля

Такое течение подчиняется закону Пуазейля:

$$Q = \frac{\Delta P \pi R^4}{8 \eta l} \qquad (7.13)$$

Согласно (7.13), объем жидкости Q, протекающий в единицу времени по горизонтальной трубе, прямо пропорционален четвертой степени радиуса R и перепаду давлений ΔP и обратно пропорционален коэффициенту вязкости жидкости η и длине трубы l. Коэффициент пропорциональности равен $\pi/8$. Формула Пуазейля справедлива только для ламинарного течения жидкости.

Введем величину, называемую гидравлическим сопротивлением X, которая определяется вязкостью жидкости, а также длиной и радиусом трубы:

$$X = \frac{8\eta l}{\pi R^4} \quad (7.14)$$

Единицы измерения гидравлического сопротивления: $[X] = \frac{с}{м^5}H$. После подстановки X в (7.13) формула Пуазейля примет вид:

$$Q = \frac{\Delta P}{X} \qquad (7.15)$$

Отсюда следует основной закон гемодинамики: перепад давлений прямо пропорционален гидравлическому сопротивлению: $\Delta P = QX$.

Можно установить аналогию между законом Пуазейля и законом Ома для участка электрической цепи $I=\Delta\varphi/R$, где I – сила тока, $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ – разность потенциалов на концах участка цепи, R – сопротивление проводника. Причиной течения жидкости является перепад давлений на концах рассматриваемого участка, а причиной тока, как известно, является разность потенциалов. Характеристикой, отвечающей за перенос объема жидкости в единицу времени, является объемная скорость $Q=V/t$, а перенос заряда в единицу времени определяется силой тока $I=q/t$. Гидравлическое сопротивление X является аналогом электрического сопротивления R.

Эта закономерность в описании электрических и гидродинамических процессов используется в моделировании явлений гемодинамики и решении конкретных задач. В частности, она позволяет применить правила вычисления результирующего электрического сопротивления для системы резисторов с различными сопротивлениями к определению общего гидравлического сопротивления системы сосудов.

При последовательном соединении резисторов, как известно, общее сопротивление системы равно сумме сопротивлений отдельных резисторов. Аналогично, результирующее гидравлическое сопротивление X_0 системы последовательно соединенных трубок равно сумме сопротивлений каждой из трубок в отдельности. Для системы из трех сосудов, изображенной на рис. 7.9, а, имеем:

$$X_0 = X_1 + X_2 + X_3 \quad (7.16)$$

В частном случае, если все три сопротивления равны, результирующее сопротивление в три раза больше сопротивления одного сосуда: $X_0 = 3X_1$.

Для параллельно соединенных резисторов обратное результирующее сопротивление равно сумме обратных сопротивлений каждого резистора. Аналогично, обратное общее гидравлическое сопротивление системы параллельно соединенных трубок равно сумме обратных гидравлических сопротивлений каждой трубки:

$$\frac{1}{X_0} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} \quad (7.17)$$

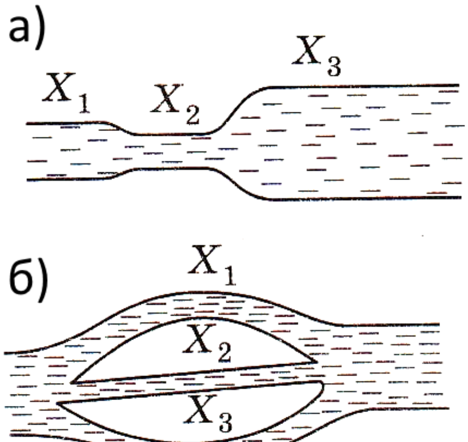


Рис. 7.9 Схематичное изображение последовательно (а) и параллельно (б) соединенных сосудов

7.7. Методы определения вязкости жидкостей

Методы определения вязкости неньютоновских жидкостей, в особенности крови, имеют важное диагностическое значение. Приборы, используемые для этих целей, называются вискозиметрами (от лат. «viscosus» — вязкий). Вначале рассмотрим капиллярные методы, основанные на применении закона Пуазейля, реализующиеся в вискозиметрах Оствальда и Гесса.

Вискозиметр Оствальда имеет U-образную конструкцию, состоящую из небольшого объёма 1, капилляра 2 и резервуара 3 (Рис. 7.10, а)).

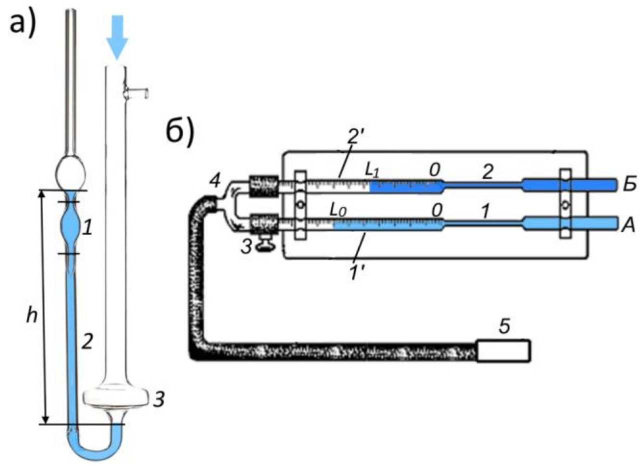


Рис. 7.10 Устройство вискозиметров Оствальда (а) и Гесса (б)

С помощью груши, создающей разность давлений, жидкость втягивается в левое плечо вискозиметра так, чтобы объем 1 полностью заполнился и образовалась разность уровней h. После того, как грушу убирают, жидкость стремится перетечь в правое плечо до наступления равенства уровней. Для определения вязкости жидкости потребуется эталонная жидкость, вязкость η_0 и плотность ρ_0 которой известна. Обычно в роли эталона используется дистиллированная вода. Также предполагается, что известна плотность жидкости ρ, вязкость которой нужно найти. Суть метода заключается в том, что вискозиметр по очереди заполняется эталонной и исследуемой жидкостями и с помощью секундомера определяется время истечения каждой жидкости из объема V. Согласно закону Пуазейля (7.13), объем V для эталонной жидкости выражается следующим образом:

$$V = \frac{\pi r^4 \rho_0 g h}{8L\eta_0} t_0 \quad (7.18)$$

Здесь t_0 –время истечения эталонной жидкости. Также учтено, что разность давлений в данном случае имеет вид $\Delta p = \rho_0 g h$, где ρ_0 – плотность эталонной жидкости. Аналогично выражая объем V через параметры исследуемой жидкости, приравнивая эти выражения и сокращая на неизменяющиеся величины, получаем:

$$\frac{\rho_0}{\eta_0} t_0 = \frac{\rho}{\eta} t \quad (7.19)$$

Выражая отсюда искомую вязкость, приходим к конечной формуле:

$$\eta = \frac{\rho t}{\rho_0 t_0} \eta_0 \quad (7.20)$$

В вискозиметре Гесса вязкость исследуемой жидкости определяется исходя из разности расстояний, на которые перемещаются эталонная и исследуемая жидкости за одно и то же время. Вискозиметр состоит из двух капилляров 1 и 2 строго одинакового диаметра, соединенных с проградуированными трубками $1'$ и $2'$, концы которых соединены с тройником 4, от которого отходит резиновая трубка с наконечником 5 (рис. 7.10, б)). Одна из пипеток имеет кран 3. Вначале путем втягивания воздуха из наконечника 5 при открытом кране через отверстие А трубка 1 заполняется эталонной жидкостью до отметки 0. Затем кран закрывается и трубка Б заполняется исследуемой жидкостью также до отметки 0. После этого кран снова открывается и через наконечник 5 происходит всасывание обеих жидкостей в трубки $1'$ и $2'$. При этом обе жидкости будут двигаться с разными скоростями, и менее вязкая эталонная жидкость пройдет расстояние L_0 , большее, чем расстояние L_1, пройденное исследуемой жидкостью. Используя закон Пуазейля и учитывая стационарность потока в трубках и капиллярах, получаем соотношение:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{L_0}{L} \quad (7.21)$$

То есть, для определения относительной вязкости исследуемой жидкости (по отношению к эталонной η_0) достаточно определить отношение $\frac{L_0}{L}$.

Вискозиметр Гесса часто используется для определения вязкости проб крови.

Описанные выше капиллярные методы позволяют легко определить вязкость жидкостей, однако, с их помощью невозможно найти зависимость вязкости от скорости сдвига. Ротационный метод позволяет определить значения вязкости при различных скоростях сдвига и, таким образом, получить зависимость $\eta = f(\frac{dv}{dy})$. Ротационный вискозиметр состоит из двух цилиндров, имеющих общую ось вращения. Внутренний цилиндр подвешен на нити, а внешний вращается с определенной угловой скоростью. Пространство между цилиндрами заполняется исследуемой жидкостью. Между угловой скоростью цилиндра и градиентом скорости в жидкости существует однозначное соответствие. Также вследствие вязкости жидкости внутренний цилиндр при вращении внешнего поворачивается до наступления равновесия, чему соответствует угол поворота θ, который пропорционален вязкости η и угловой скорости ω: $\theta = k\eta\omega$. Таким образом, меняя угловую скорость и измеряя угол поворота, можно найти вязкость при различных градиентах скорости.

Тестовый контроль

7.1. Свойство текучих тел сопротивляться передвижению слоёв друг относительно друга называется

A) текучесть

B) вязкость

C) гемодинамика

D) механика

7.2. Основной закон вязкого течения, описывающий связь силы внутреннего трения со скоростью сдвига слоёв и площадью соприкосновения слоёв жидкости

A) уравнение стационарного потока

B) формула Пуазейля

C) формула Рейнольдса

D) формула Ньютона

7.3. От чего НЕ зависит вязкость ньютоновской жидкости?

A) температуры

B) формы молекул

C) скорости сдвига слоев

D) химического состава жидкости

E) размера молекул

7.4. Кинематической вязкостью называют

A) отношение вязкости жидкости к скорости жидкости

B) отношение плотности жидкости к вязкости жидкости

C) отношение вязкости жидкости к плотности жидкости

D) произведение вязкости и плотности жидкости

7.5. От чего не зависит кинематическая вязкость жидкости?

A) давления

B) напряжения сдвига

C) химического состава жидкости

D) плотности жидкости

E) формы молекул

7.6. Коэффициент динамической вязкости измеряется в …

A) Па·с

B) Па/с

C) Па

D) $м^2/с$

7.7. Коэффициент кинематической вязкости измеряется в …

A) Па·с

B) $м^3/с$

C) $Н·с/м^5$

D) $м^2/с$

7.8. Самый низкий коэффициент вязкости из предложенных жидкостей имеет

A) кровь

B) плазма крови

C) вода

D) глицерин

7.9. Самый низкий коэффициент вязкости из предложенных жидкостей имеет

A) Кровь в капиллярах

B) Кровь в артериях

C) Плазма крови (при 36 ^{o}C)

D) мёд

7.10. Вязкость крови в большей мере определяют

A) лейкоциты

B) тромбоциты

C) эритроциты

D) фагоциты

E) лимфоциты

7.11. Какие свойства и функции эритроцитов НЕ влияют на вязкость крови?

A) концентрация

B) время жизни

C) форма

D) эластичность стенок

7.12. От чего не зависит вязкость крови?

A) температуры

B) числа Рейнольдса

C) скорости сдвига

D) концентрации эритроцитов

7.13. Вязкость крови и вязкость воды различаются

A) и качественно, и количественно

B) количественно

C) качественно

D) не различаются

7.14. Человек имеет высокую температуру тела 41 градус Цельсия, вязкость плазмы крови при этом

A) уменьшится

B) увеличится

C) не изменится

D) увеличится в 2 раза

7.15. С помощью вискозиметра Гесса можно определить

A) поверхностное натяжение

B) вязкость крови

C) скорость сдвига

D) концентрацию вещества

7.16. Скорость сдвига – это величина, равная

A) Изменению скорости течения за единицу времени

B) Изменению скорости течения на единицу расстояния между слоями

C) Изменению скорости течения на единицу площади соприкасающихся слоёв

D) Изменению скорости течения на единицу силы внутреннего трения

7.17. Скорость сдвига измеряется в …

A) м/с

B) $м^2/с$

C) $м/с^2$

D) 1/с

7.18. Ньютоновская жидкость течёт между двумя пластинами, одна из которых неподвижна, другая перемещается с постоянной скоростью v. Расстояние между пластинами H. От чего зависит модуль скорости сдвига?

A) от v и H

B) только от v

C) только от H

D) ни от чего не зависит, это постоянная

7.19. Напряжение сдвига – это величина, равная

A) произведению силы трения между соприкасающимися слоями и площади соприкосновения

B) отношению силы трения между соприкасающимися слоями к скорости сдвига

C) отношению силы трения между соприкасающимися слоями к площади соприкосновения

D) произведению площади соприкосновения слоёв и скорости сдвига

7.20. Напряжение сдвига измеряется в …

A) Па·с

B) $Н·с/м^5$

C) Па

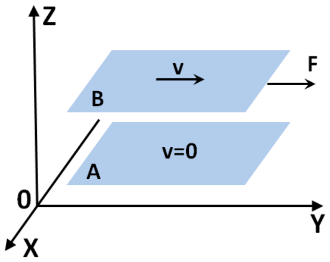
7.21. Как нужно изменить вязкость η и градиент скорости $grad(v)$, чтобы напряжение сдвига оставалось постоянным?

A) увеличить η и $grad(v)$

B) увеличить η и уменьшить $grad(v)$

C) уменьшить η и $grad(v)$

7.22. На рисунке изображены две пластины, между которыми находится ньютоновская жидкость. Пластина А неподвижна, пластина В движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ под действием силы $\vec{F}$ параллельно оси Y. Куда



направлена скорость сдвига?

A) сонаправлена с X

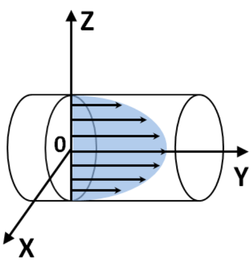
B) сонаправлена с Y

C) сонаправлена с Z

D) противонаправлена Y

E) противонаправлена Z

7.23. На рисунке изображена труба, по которой течёт ньютоновская жидкость в направлении оси Y. В какой плоскости лежит вектор скорости сдвига?



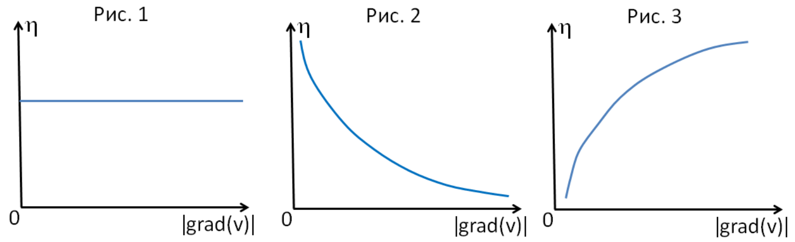
A) XOY

B) XOZ

C) YOZ

D) под углом 45° к плоскости YOZ

7.24. На рисунках 1-3 изображены зависимости коэффициента динамической вязкости η от модуля скорости сдвига. На каком рисунке или рисунках верно представлено поведение этой величины для ньютоновской жидкости?



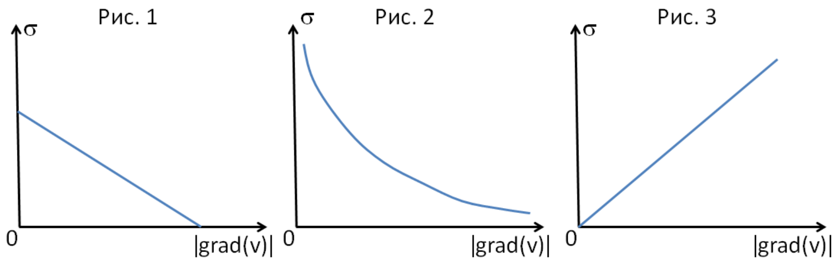
A) Рис. 1 и 2

B) Рис. 1 и 3

C) Рис. 1

D) Рис. 2

7.25. На рисунках 1-3 изображены зависимости напряжения сдвига σ от модуля скорости сдвига. На каком рисунке или рисунках верно представлено поведение этой величины для ньютоновской жидкости?



A) Рис. 1 и 2

B) Рис. 1 и 3

C) Рис. 2

D) Рис. 3

7.26. Ньютоновская жидкость – это жидкость, вязкость которой

A) Зависит от режима течения

B) Не подчиняется уравнению Ньютона

C) Не зависит от скорости сдвига

D) Не зависит от температуры

7.27. В ньютоновской жидкости напряжение сдвига

A) обратно пропорционально скорости сдвига

B) квадратично зависит от скорости сдвига

C) не зависит от скорости сдвига

D) линейно зависит от скорости сдвига

7.28. Неньютоновская жидкость – это жидкость, вязкость которой

A) Линейно зависит от скорости сдвига.

B) Не зависит от температуры.

C) Не зависит от скорости сдвига.

D) Зависит от скорости сдвига.

7.29. При увеличении скорости сдвига коэффициент вязкости неньютоновской жидкости не может

A) уменьшаться линейно

B) уменьшаться нелинейно

C) оставаться постоянным

D) увеличиваться линейно

7.30. К неньютоновским жидкостям НЕ относится

A) кровь

B) раствор крахмала в воде

C) лимфа

D) мёд

7.31. К ньютоновским жидкостям не относится

A) лимфа

B) кровь

C) плазма крови

D) сыворотка крови

7.32. Кровь - это жидкость

A) ньютоновская

B) неньютоновская

C) однородная

D) диэлектрическая

7.33. При стационарном течении…

A) через каждый уровень поперечного сечения протекает одинаковый объём жидкости

B) все слои жидкости двигаются с постоянной скоростью

C) профиль усреднённой скорости имеет параболическую форму

D) ускорение течения жидкости в любой точке остаётся неизменным

7.34. Объёмная скорость – это …

A) объём жидкости, протекающий через единицу площади поперечного сечения за единицу времени

B) объём жидкости, протекающий через поперечное сечение за единицу времени

C) объём жидкости, протекающий через единицу площади поперечного сечения за определённый промежуток времени

D) объём жидкости, протекающий через единичный объём за единицу времени

7.35. Условие стационарного потока имеет вид (Q – объёмная скорость):

A) $Q > 0$

B) $Q = 0$

C) $Q \geq 0$

D) $Q = Const$

7.36. Объёмная скорость измеряется в …

A) м/с

B) 1/с

C) м^3/с

D) м^2/с

7.37. Ламинарный режим течения характеризуется…

A) параллельным течением слоёв жидкости

B) наличием вихрей в жидкости только у стенок сосуда

C) наличием вихрей по всему объему сосуда

D) перемешиванием слоёв жидкости

7.38. Турбулентный режим течения характеризуется…

A) наличием вихрей в жидкости только у стенок сосуда

B) наличием вихрей в жидкости только в центре сосуда

C) параболическим профилем средней скорости слоёв

D) перемешиванием слоёв жидкости

7.39. Переход ламинарного течения в турбулентное определяется числом

A) Пуазейля

B) Ньютона

C) Рейнольдса

D) Авогадро

7.40. Движение жидкости становится турбулентным, если вычисленное число Рейнольдса будет …. критического числа Рейнольдса

A) меньше

B) больше

C) больше в два раза

D) строго равно

7.41. Число Рейнольдса тем больше, чем

A) больше вязкость жидкости

B) меньше вязкость жидкости

C) меньше диаметр сосуда

D) меньше скорость течения жидкости

7.42. От каких параметров не зависит величина числа Рейнольдса?

A) плотности жидкости

B) скорости течения

C) длины трубы

D) вязкости жидкости

7.43. Каково примерное критическое значение числа Рейнольдса для воды?

A) 2300

B) 1500±70

C) 2300

D) 970±80

7.44. Каково примерное критическое значение числа Рейнольдса для крови?

A) 2300

B) 400±70

C) 970±80

D) 100±1

7.45. При ламинарном течении жидкости акустические шумы

A) не возникают

B) возникают

C) усиливаются

D) уменьшаются

7.46. При турбулентном течении жидкости акустические шумы

A) не возникают

B) возникают

C) исчезают

D) возникают и исчезают

7.47. Возникновение акустических шумов в потоке жидкости связано с …

A) ламинарным режимом течения

B) параллельным течением слоев жидкости

C) турбулентным режимом течения

D) отсутствием поперечного колебания стенок сосуда

7.48. Согласно формуле Пуазейля, объёмная скорость жидкости в сосуде линейно зависит от…

A) радиуса сосуда

B) вязкости жидкости

C) разности давлений на концах сосуда

D) длины сосуда

7.49. Согласно формуле Пуазейля, объёмная скорость жидкости в сосуде обратно зависит от

A) радиуса сосуда

B) вязкости жидкости

C) разности давлений на концах сосуда

D) времени

7.50. Согласно формуле Пуазейля, если радиус сосуда, по которому протекает жидкость, увеличится в 2 раза, то объём жидкости Q, протекающей по горизонтальной трубе небольшого сечения за единицу времени

A) уменьшится в 16 раз

B) уменьшится в 4 раза

C) увеличится в 16 раз

D) увеличится в 4 раза

7.51. Согласно формуле Пуазейля, если разность давления на концах трубы повысится в 2 раза, то объём жидкости Q, протекающей по горизонтальной трубе небольшого сечения за единицу времени

A) уменьшится в 2 раза

B) уменьшится в 4 раза

C) увеличится в 2 раза

D) увеличится в 4 раза

7.52. Основной фактор, обеспечивающий движение крови по сосудам

A) Эластичность стенок артерий.

B) Наличие гидравлического сопротивления.

C) Разность давлений, создаваемая работой сердца.

D) Сокращение скелетных мышц.

7.53. Гидравлическое сопротивление тем больше, чем…

A) больше длина сосуда

B) меньше вязкость жидкости

C) меньше длина сосуда

D) больше диаметр сосуда

7.54. Гидравлическое сопротивление измеряется в…

A) Ом

B) Н·с/м

C) Па/с

D) Н·с/м^5

7.55. Три трубки с известными сопротивлениями X_1, X_2 и X_3 соединены параллельно. По какой формуле вычисляется сопротивление X системы этих трубок?

A) $X = \frac{X_1 X_2 X_3}{X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_1 X_3}$

B) $X = X_1 + X_2 + X_3$

C) $X = \frac{X_1 X_2 X_3}{X_1 + X_2 + X_3}$

D) $X = \frac{X_1}{3}$

7.56. Три трубки с известными сопротивлениями X_1, X_2 и X_3 соединены последовательно. По какой формуле вычисляется сопротивление X системы этих трубок?

A) $X = \frac{X_1 X_2 X_3}{X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_1 X_3}$

B) $X = X_1 + X_2 + X_3$

C) $X = \frac{X_1 X_2 X_3}{X_1 + X_2 + X_3}$

D) $X = \frac{X_1}{3}$

7.57. Линейная скорость кровотока в кровеносной системе от аорты до капилляров

A) увеличивается

B) уменьшается

C) становится равной нулю

D) постоянна

7.58. Скорость течения крови в кровеносном сосуде максимальна … сосуда

A) в центре кровеносного

B) у стенок кровеносного

C) на равном удалении от оси

D) одинакова в любой точке

7.59. Свойство жидкостей под действием приложенных механических сил поддаваться перемещению молекулярных слоев друг относительно друга называется

A) текучесть

B) вязкость

C) внутреннее трение

D) механика

7.60. Согласно формуле Пуазейля, если вязкость жидкости увеличится в 3 раза, то объём жидкости Q, протекающей по горизонтальной трубе небольшого сечения за единицу времени

A) уменьшится в 9 раз

B) уменьшится в 3 раза

C) увеличится в 2 раза

D) увеличится в 3 раза

1. Установите соответствие

7.61. Установите соответствие между указанными величинами и единицами измерения:

1) Скорость сдвига 2) Напряжение сдвига	а) Н·с/м^5 б) Па/с в) Па·с

3) Динамический коэффициент вязкости 4) Кинематический коэффициент вязкости	г) м^2/с д) Па е) 1/с

7.62. Установите соответствие между указанными величинами и единицами измерения:

1) Число Рейнольдса 2) Гидравлическое сопротивление 3) Объёмная скорость	а) м^3/с б) Ом в) безразмерная величина г) Н·с/м^5

7.63. Установите соответствие между величинами и их характеристиками из закона вязкости Ньютона: $F_{\text{тр}} = \eta\left|\frac{dv}{dy}\right|S$

1) $F_{\text{тр}}$ 2) η 3) $\left\|\frac{dv}{dy}\right\|$ 4) S	а) напряжение сдвига б) коэффициент динамической вязкости в) модуль скорости сдвига г) коэффициент кинематической вязкости д) сила внутреннего трения е) площадь соприкасающихся слоёв

7.64. Установите соответствие между величинами и их характеристиками в законе Пуазейля: $Q = \frac{\pi}{8}\frac{\Delta P \cdot R^4}{\eta l}$

1) Q 2) ΔP 3) R 4) η 5) l	а) скорость потока б) гидравлическое сопротивление в) радиус сосуда г) перепад давлений на концах сосуда д) длина сосуда е) объёмная скорость

	ж) коэффициент динамической вязкости

7.65. Установите соответствие между выражениями и их характеристиками:

1) $\sigma = \frac{F}{S}$ 2) $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ 3) $\eta = \frac{\sigma}{\left\lvert\frac{dv}{dy}\right\rvert}$	а) коэффициент кинематической вязкости б) напряжение сдвига в) площадь соприкасающихся слоёв г) коэффициент динамической вязкости д) сила внутреннего трения

7.66. Установите соответствие между жидкостями и величинами их вязкостей

1) Вода 2) Кровь в капиллярах 3) Кровь в артериях 4) Плазма крови (при 36 °C)	а) 1 Па·с б) 800 мПа·с в) 4÷5 кПа·с г) 1.5 мПа·с д) 4÷5 мПа·с е) 1 мПа·с

7.67. Установите аналогию между формулой Пуазейля и законом Ома для участка цепи:

1) Перепад давлен 2) Объёмная скорость 3) Гидравлическое сопротивление	а) электрическое сопротивление б) сила тока в) разность потенциалов г) напряжённость электрического поля

7.68. Установите соответствие между изменениями поперечного сечения сосуда и величинами скорости потока v, перепада давлений ΔP и гидравлического сопротивления X:

1) Сужение сосуда 2) Расширение сосуда	а) $v\uparrow, X\downarrow, \Delta P\uparrow$ б)$v\downarrow, X\downarrow, \Delta P\downarrow$ в)$v\uparrow, X\downarrow, \Delta P\uparrow$

	г) $v\uparrow, X\uparrow, \Delta P\uparrow$ д)$v\downarrow, X\downarrow, \Delta P\uparrow$

7.69. Вода равномерно течет в реке глубиной 6 м. Скорость приповерхностного слоя воды 4 м/с. Приняв, что скорость слоев воды растет по линейному закону при удалении от дна реки, найти градиент скорости.

7.70. Вода равномерно течет в реке глубиной 10 м. Скорость приповерхностного слоя воды 5 м/с. Найти силу трения между слоями воды площадью 1 м^2. Вязкость воды 1 мПа·с.

7.71. Жидкость с коэффициентом вязкости η = 1.4 мПа·с заключена между пластинами площадью 5 м^2. Относительная скорость пластин – 3 м/с, расстояние между ними – 7 м. Найти силу внутреннего трения между слоями жидкости.

7.72. Сила внутреннего трения между слоями жидкости площадью 35 см^2 равна 90 мН. Чему равно напряжение сдвига слоев?

7.73. Найти вязкость масла, если при напряжении сдвига 72 Па скорость сдвига составляет 80 с$^{-1}$.

7.74. Движение крови в сосуде цилиндрической формы подчиняется параболическому закону: $v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, где R = 6 мкм - радиус сосуда, v_0 = 1 мм/с - скорость на оси сосуда, r - расстояние от оси. На каком расстоянии r от оси сосуда кровь движется со скоростью, равной 0.5 мм/с?

7.75. Чему равно число Рейнольдса для крови, имеющей плотность 1.05 г/см^3 и вязкость 4 мПа·с, текущей со скоростью 0.5 м/с в аорте диаметром 2 см? Какой режим течения реализуется при данных параметрах? Почему? Критическое значение числа Рейнольдса для крови $Re_{кр}$ = 970.

7.76. Чему равна критическая скорость течения воды, протекающей по трубе радиусом 1 см, при которой происходит переход между ламинарным и турбулентным течением? Критическое значение числа Рейнольдса для воды 2300, плотность и вязкость воды - 1000 кг/м^3 и 1 мПа·с соответственно.

7.77. Как относятся критические скорости воды и крови, если обе жидкости протекают по трубкам одинакового размера? Критическое значение числа Рейнольдса, плотность и вязкость для воды и крови равны соответственно: $Re_{кр}$=2300, ρ=1000 кг/м^3, η=1 мПа·с и $Re_{кр}$=970, ρ=1050 кг/м^3, η=4 мПа·с?

7.78. Какой объем крови вязкостью 5 мПа·с протечет по сосуду радиуса 0.4 см и длины 1 см за время 2 с, если перепад давлений на концах сосуда составляет 5 мм рт. ст.? Принять 1 мм рт. ст. = 133.32 Па.

7.79. Пусть по двум трубам протекают две жидкости, причем параметры труб и вязкости жидкостей соотносятся следующим образом: $R_2=3R_1$, $l_2 = 4l_1$, $\eta_2=1.5\eta_1$. Как изменится объемная скорость второй жидкости относительно первой?

7.80. Определить, какой объем жидкости прошел через участок цилиндрической трубы радиуса 3 см за 9 мин, если скорость жидкости 3 м/с?

7.81. Найти объемную скорость жидкости, протекающей в течении 12 с по трубе диаметром 8 см и длиной 0.5 м.

7.82. Какое гидравлическое сопротивление будет испытывать вода в трубе, если при равности давлений на ее концах 0.3 Па расход воды составляет 50 $м^3$/час?

7.83. Какое гидравлическое сопротивление оказывается со стороны трубки радиусом 5 мм и длиной 20 см при течении по ней глицерина? Вязкость глицерина 1.5 Па·с.

7.84. Два сосуда соединены последовательно. Гидравлическое сопротивление одного сосуда 100 Н·$м^5$/с, другого – в 3 раза больше. Чему равно общее сопротивление системы сосудов?

7.85. Два сосуда соединены параллельно. Гидравлическое сопротивление одного сосуда 360 Н·$м^5$/с, другого – в 3 раза меньше. Чему равно общее сопротивление системы сосудов?

7.86. Известно, что площадь суммарного просвета капилляров в организме человека в 500 раз больше площади поперечного сечения аорты. Как соотносятся скорость крови в капиллярах и в аорте?

7.87. Объемная скорость жидкости в трубе равна 50 $м^3$/с, линейная скорость – 15 м/с. Найти диаметр трубы.7.88. Жидкость течет стационарно по трубе с площадью поперечного сечения 3 $м^2$ со скоростью 10 м/с. Труба разделяется на несколько трубок с одинаковым сечением 3 $м^2$, по которым жидкость течет с одинаковой скоростью 2 м/с. На сколько трубок разделилась первая труба?

8. Биомембранология

Клетка - элементарная живая система. Каждая клетка окружена наружной клеточной плазматической мембраной, которая заключает внутри себя содержимое клетки. С другой стороны, тонкая регуляция внутриклеточных процессов осуществляется на основе пространственного разделения органоидов клетки (внутриклеточные мембраны), которые формируют различные органоиды клетки (митохондрии, лизосомы, органоиды и т.п.)

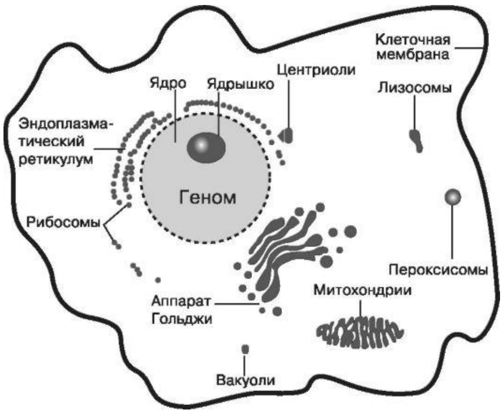


Рис. 8.1 Схема строения клетки

Биологическая мембрана (БМ) – (от лат. membrana – оболочка, кожица) – поверхностная структура молекулярного размера, которая имеет в среднем толщину 8-12 нм, отграничивающая клетку от внешней среды или отграничивающая внутриклеточные органоиды/частицы от цитоплазмы.

Биологической мембране свойственна полупроницаемость. Обладая избирательной проницаемостью, биологические мембраны регулируют в клетках концентрацию солей, сахаров, аминокислот и других продуктов обмена веществ.

8.1. Основные функции биологических мембран

Элементарная живая система, способная к самостоятельному существованию, развитию и воспроизведению – это живая клетка – основа строения всех животных и растений. Важнейшими условиями существования клетки (и клеточных органелл) являются:

1) автономность по отношению к окружающей среде (вещество клетки не должно смешиваться с веществом окружения, должна соблюдаться автономность химических реакций в клетке и ее отдельных частях);

2) связь с окружающей средой (непрерывный, регулируемый обмен веществом и энергией между клеткой и окружающей средой).

Живая клетка – открытая система.

Единство автономности от окружающей среды и одновременно тесной связи с окружающей средой – необходимое условие функционирования живых организмов на всех уровнях их организации. Поэтому важнейшее условие существования клетки, и, следовательно, жизни – нормальное функционирование биологических мембран.

Три основные функции биологических мембран:

Барьерная – обеспечивает селективный, регулируемый, пассивный и активный обмен веществом с окружающей средой (селективный – значит, избирательный: одни вещества переносятся через биологическую мембрану, другие – нет; регулируемый – проницаемость мембраны для определенных веществ меняется в зависимости от генома и функционального состояния клетки);

Матричная – обеспечивает определенное взаимное расположение и ориентацию мембранных белков, обеспечивает их оптимальное взаимодействие (например, оптимальное взаимодействие мембранных ферментов);

Механическая – обеспечивает прочность и автономность клетки, внутриклеточных структур.

Кроме того, биологические мембраны выполняют и другие *специфические* функции:

Энергетическую – синтез АТФ на внутренних мембранах митохондрий и фотосинтез в мембранах хлоропластов;

Генерацию и проведение биопотенциалов - С помощью мембраны в клетке поддерживается постоянная концентрация ионов: концентрация иона K^+ внутри клетки значительно выше, чем снаружи, а концентрация Na^+ значительно ниже, что очень важно, так как это обеспечивает поддержание разности потенциалов на мембране и генерацию нервного импульса.

Рецепторную (механическая, акустическая, обонятельная, зрительная, химическая, терморецепция – мембранные процессы) и многие другие функции.

Общая площадь всех биологических мембран в организме человека достигает десятков тысяч квадратных метров. Относительно большая совокупная площадь связана с огромной ролью мембран в жизненных процессах.

8.2. Состав биомембран

В состав биомембран входят липиды (25 - 75 %), белки (20 - 75 %), углеводы (10 - 15 %) и вода

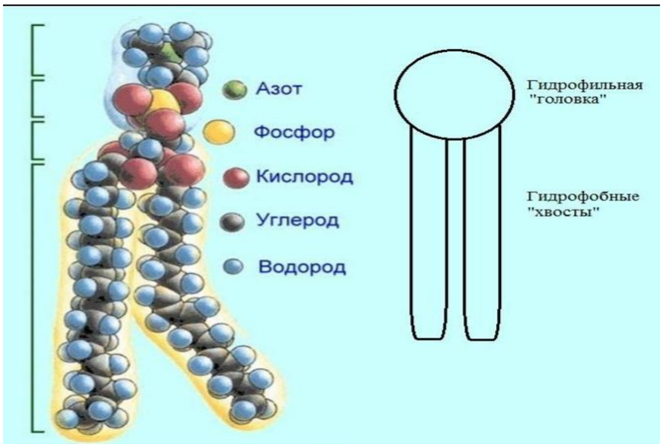


Рис. 8.2. Структура молекулы фосфолипида

Липиды – это низкомолекулярные органические соединения, включающие жиры и жироподобные вещества, извлекаемые из клетки органическими растворителями (хлороформ, ацетон, эфир, бензол).

Липиды бывают простые и сложные. Простые – соединения спирта, высокомолекулярных жирных кислот и других компонентов. Сложные – это комплексы с белками (липопротеины). В состав биомембран обычно входят липиды трех основных классов: фосфолипиды, гликолипиды, стероиды.

Поскольку одна часть молекулы липида гидрофобная, а другая – гидрофильная, то она обладает сродством как к полярным, так и неполярным растворителям – липид амфифилен. Такие молекулы в воде склонны к агрегации: гидрофобные участки слипаются, вытесняют воду и образуют внутреннюю неполярную область мембраны, а полярные группы располагаются на границе с водой. Именно амфифильность мембранных липидов определяет стабильность биомембран в воде.

8.3. Современные представления о структуре биомембран

Совокупность результатов, полученных физическими и химическими методами, дала возможность предложить так называемую жидкостно-мозаичную модель строения биомембраны, которая лежит в основе современных представлений о строении биомембран (Сингер и Никольсон, 1972).

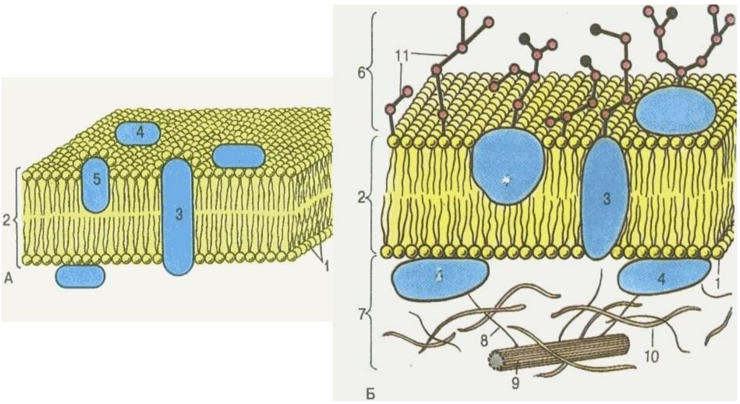


Рис. 8.3. Структура биомембраны: 1 – молекула липида; 2 – липидный бислой; 3 – интегральные

белки; 4 – периферические белки; 5 – полуинтегральные белки; 6 – гликокаликс; 7 – субмембранный слой; 8 – актиновые микрофиламенты; 9 – микротрубочки; 10 – промежуточные филаменты; 11 – углеводные молекулы гликопротеинов и гликолипидов

Структурную основу биомембран образует двойной липидный слой (фосфолипиды), инкрустированный белками. При физиологических условиях липидный слой находится в жидком агрегатном состоянии. Это позволяет сравнивать биомембраны с фосфолипидным «морем», по которому «плавают» белковые «айсберги». Соотношение белков и липидов во всех биомембранах примерно одинаковое.

Текучесть. Все клеточные мембраны представляют собой подвижные текучие структуры. Большая часть составляющих их молекул липидов и белков способна достаточно быстро перемещаться в плоскости мембраны. Отдельные молекулы липидов способны свободно диффундировать в пределах липидного бислоя. Текучесть липидного слоя делает возможным для мембранных белков быстрое перемещение и взаимодействие друг с другом, что обеспечивает мембранный перенос веществ от места поступления в мембрану в другие части клетки. Текучесть позволяет мембранам сливаться друг с другом, не утрачивая при этом способности к регуляции их проницаемости.

Существует четыре основных способа ассоциации мембранных белков с липидным бислоем:

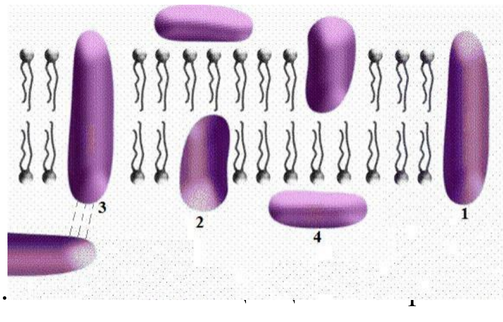


Рис. 8. [illegible] белков

1 - интегральные белки пронизывают мембрану насквозь;

2 - поверхностные белки погружены в липидный бислой частично;

3 - белки удерживаются ковалентной связью с другими мембранными белками (микрофиламенты и микротрубочки);

4 - белки, ковалентно соединенные с одной или двумя цепями жирных кислот.

Большинство мембранных белков, так же, как и липидов, способны свободно перемещаться в плоскости мембраны. Известно **два ключевых вида перемещения белков и липидов в мембране** – это так называемые **латеральная диффузия и «флип-флоп»**.

Рис. 8.5. Способы [illegible] точных мембранах

Латеральная диффузия – это хаотическое тепловое перемещение молекул липидов и белков в плоскости мембраны.

«Флип-флоп» – это диффузия молекул мембранных фосфолипидов поперек мембраны, но она происходит гораздо реже, чем латеральная диффузия.

8.4. Транспорт веществ через биологические мембраны

Живые системы на всех уровнях организации – открытые системы, поэтому транспорт веществ через биологические мембраны – необходимое условие жизни. С переносом веществ через биологические мембраны связаны процессы метаболизма клетки, биоэнергетические процессы, образование биопотенциалов и прочее. Нарушение транспорта приводит к различным патологиям. Ключевым для описания транспорта является электрохимический потенциал.

Направление транспорта веществ через мембрану

Мембранный транспорт веществ различается по направлению их перемещения и количеству переносимых данным переносчиком веществ:

1. **Унипорт** – перенос одного вещества в одном направлении с помощью транспортной молекулы.
2. **Симпрот** – транспорт двух веществ в одном направлении через один переносчик.
3. **Антипорт** – перемещение двух веществ в разных направлениях через один переносчик.

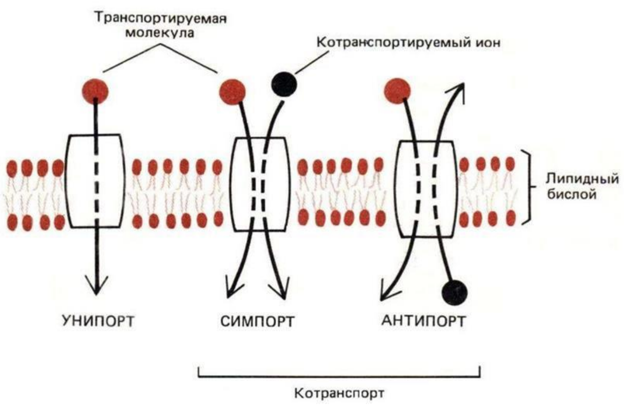


Рис. 8.6 Направление транспорта веществ через мембрану

Мембрана клетки является избирательным барьером для различных веществ, находящихся внутри и снаружи клетки. Существует несколько специфических механизмов транспорта в мембранах. Все они могут быть подразделены на два типа: пассивный и активный транспорт.

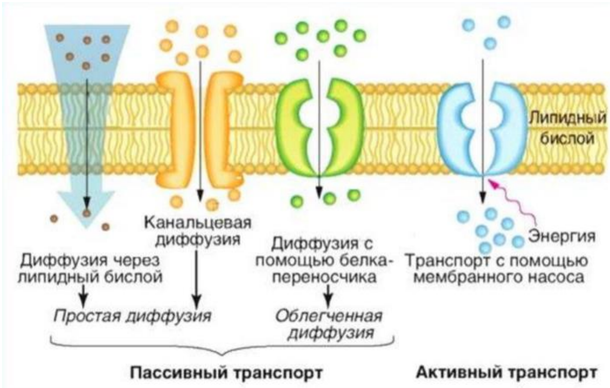


Рис. 8.7. Механизм прохождения веществ через мембрану

Пассивный транспорт – это перенос вещества из мест с большим значением электрохимического потенциала к местам с его меньшим значением. Пассивный транспорт идет с понижением энергии, следовательно, может идти самопроизвольно.

Все виды пассивного транспорта основаны на принципе диффузии. Небольшая частица, растворённая в жидкости, постоянно подвергается ударам со стороны окружающих её молекул жидкости.

Диффузия является результатом хаотических независимых движений многих частиц. Если концентрация вещества одинакова в каждой части раствора, то движение частиц хаотично. При этом существует дрейф частиц из областей, где они расположены более плотно, в области, где частиц меньше.

Диффузия незаряженных частиц вызывается их концентрационным градиентом. Частицы вещества перемещаются из области более высокой концентрации вещества в область, где концентрация этого вещества низкая. Диффузия постепенно уменьшает градиент концентрации до тех пор, пока не наступит состояние равновесия. При этом в каждой точке установится равная концентрация, и диффузия в обоих направлениях будет осуществляться в равной степени. Диффузия является пассивным транспортом, поскольку не требует затрат внешней энергии.

Существует несколько видов диффузии в плазматической мембране:

1. Простая диффузия. Вещества, перемещающиеся через мембрану путём свободной диффузии, не образуют каких-либо химических связей с другими веществами. Закон Фика указывает, что поток вещества, перемещаемого путём диффузии, пропорционален движущей силе диффузии - градиенту концентрации вещества:

$$I = -D \cdot \frac{dC}{dx} \qquad (8.1).$$

Отрицательный знак означает, что поток направлен из области высокой концентрации вещества в область с более его низкой концентрацией, в результате чего градиент концентрации уменьшается. D - коэффициент диффузии, который зависит от природы вещества и температуры:

$$D = U_m \cdot R \cdot T \qquad (8.2)$$

где U_m – подвижность диффундирующих молекул, выраженная для моля, R – универсальная газовая постоянная, T- термодинамическая температура.

Так как *grad C*- определить трудно, то для описания диффузии веществ через мембрану используют более простое уравнение:

$$I = p \cdot (C_{in} - C_{out}) \qquad (8.3)$$

где p – коэффициент проницаемости *(м/с),* C_{in} – концентрация внутри клетки, C_{out} – концентрация снаружи клетки.

$$p = \frac{D \cdot K}{l} \quad \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] \qquad (8.4)$$

где l – толщина биологической мембраны, D – коэффициент диффузии, K- коэффициент распределения вещества между липидной и водной фазами.

$$K = \frac{c_i}{c_M} \qquad K = \frac{c_o}{c_M} \qquad (8.5)$$

где c_i – концентрация какого-либо иона внутри клетки, c_o - концентрация какого-либо иона снаружи клетки, $c_м$ – концентрация иона в водной фазе.

Плотность потока вещества через биологическую мембрану прямо пропорциональна разности концентраций внутри и снаружи клетки.

2. Облегченная диффузия неэлектролитов.

Крупные гидрофильные молекулы (сахара, аминокислоты) перемещаются через мембраны с помощью специальных молекул - мембранных переносчиков.

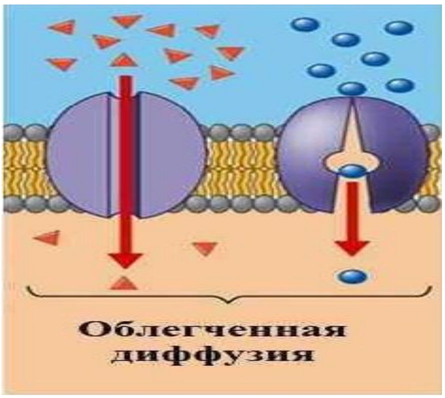


Рис. 8.8 Облегченная диффузия

Транспортируемая молекула проходит через мембрану вследствие изменения конформации белка-переносчика при химическом взаимодействии центров связывания обеих молекул. Транспорт веществ через мембрану, в котором используются транспортные молекулы, называются облегчённой диффузией. Никакая дополнительная энергия не требуется для этого процесса. Но облегченная диффузия отличается от свободной диффузии своей высокой специфичностью. Переносчики мембраны могут узнавать даже оптические изомеры одного и того же вещества. Другой особенностью облегченной диффузии является феномен насыщения. Поток вещества, транспортируемого путём облегченной диффузии, растёт в зависимости от концентрации вещества только до определенной величины.

3. Электродиффузия - диффузия электрически заряженных частиц (ионов) под влиянием концентрационных и электрических градиентов. Ионы - атомы или группы атомов, которые приобретают электрический

заряд, теряя или приобретая электроны.

Механизм электродиффузии в живой клетке обеспечивает проницаемость мембран для кислорода и углекислого газа. Этот процесс происходит слишком медленно и плохо контролируется, поэтому клетка не может его использовать для переноса питательных веществ и необходимых для жизнедеятельности ионов.

Скорость переноса ионов значительно возрастает, если в мембране существуют ионные каналы. Наиболее распространены каналы для ионов калия, натрия, кальция. Ионные мембранные каналы образованы интегральными белками. Такой канал может быть либо открыт, либо закрыт для транспорта ионов. Эти два состояния реализуются изменением конформации каналообразующих белков, что может быть вызвано изменением условий в клетке и во вне- клеточной среде, например, изменением мембранного потенциала.

Так как обычно с помощью каналов транспортируются гидрофильные вещества, то во внутренней полости их имеется большое число гидрофильных химических групп. Каждый канал неоднороден по строению: вдоль его внутренней полости располагаются различные химические группы, сродство ионов к которым неодинаково. Канал может иметь один или несколько ионных центров связывания. Эти центры представляют собой заряженные группы. Когда ион попадает в канал, он связывается с этими группами и таким образом попадает в потенциальную яму. Для того чтобы попасть в другую потенциальную яму, иону требуется преодолеть некоторый потенциальный барьер. Таких барьеров вдоль длины канала может быть несколько, причем высота их, обычно, неодинакова и может изменяться в зависимости от наличия или отсутствия ионов в канале, или изменения трансмембранной разности потенциалов. Так как в канале находятся заряженные группы, то изменение мембранного потенциала является нелинейным. Кроме этого, наличие заряженных групп может привести к непостоянству значений коэффициента распределения по длине канала.

Многие мембранные каналы настолько узки, что ионы не могут в них двигаться в различных направлениях независимо друг от друга: если в какой-либо потенциальной яме уже есть ион, то другой не может в неё попасть.

Это относится, например, к калиевым каналам. Встречные потоки ионов натрия через натриевые каналы можно считать независимыми, но если через эти каналы движутся ионы калия, то принцип независимости уже не выполняется. Для многих каналов, в зависимости от их строения, при высоких концентрациях ионов в окружающей среде наблюдается:

а) эффект насыщения: при увеличении концентрации ионов скорость их переноса повышается, но только до определенного уровня, выше которого скорость не изменяется;

б) блокировка: при концентрациях ионов выше некоторого значения скорость переноса начинает снижаться.

При переходе иона из окружающей среды в канал свободная энергия уменьшается. При этом величина потенциального барьера ниже, чем при переходе иона непосредственно через липидный бислой мембраны.

Основные свойства ионных каналов:

1) селективность;
2) независимость работы отдельных каналов;
3) дискретный характер проводимости;
4) зависимость параметров каналов от мембранного потенциала.

Рассмотрим подробнее эти свойства:

1. Селективность – способность ионных каналов избирательно пропускать ионы какого-либо одного типа. Ионные каналы обладают абсолютной селективностью по отношению к катионам или анионам (катион-селективные каналы, анион-селективные каналы). В то же время

через катион-селективные каналы способны проходить различные катионы различных химических элементов. Но проводимость мембраны для неосновного иона будет существенно ниже. Способность ионного канала пропускать различные ионы называется относительной селективностью и характеризуется рядом селективности – соотношением проводимостей канала для разных ионов, взятых при одной концентрации.

2. Независимость работы отдельных каналов. Прохождение тока через отдельный ионный канал не зависит от того, идет ли ток через другие каналы. Влияние каналов друг на друга происходит опосредованно: изменение проницаемости каких-либо каналов меняет мембранный потенциал, а уже он влияет на проводимость прочих ионных каналов.

3. Дискретный характер проводимости ионных каналов. Ионные каналы представляют собой субъединичный комплекс белков, пронизывающий мембрану. В центре его существует трубка, сквозь которую могут проходить ионы: на 1 $мкм^2$ аксона кальмара находится около 500 натриевых каналов. Проводимость ионного канала дискретна, и он может находиться в двух состояниях: открытом или закрытом. Переходы между состояниями происходят в случайные моменты времени и подчиняются статистическим закономерностям. Нельзя сказать, что данный ионный канал откроется именно в этот момент времени. Можно лишь сделать утверждение о вероятности открывания канала в определенном интервале времени.

4. Зависимость параметров канала от мембранного потенциала. Ионные каналы нервных волокон чувствительны к мембранному потенциалу. Это проявляется в том, что после начала деполяризации мембраны соответствующие токи начинают изменяться с той или иной кинетикой. Ион- селективный канал имеет сенсор, чувствительный к действию электрического поля. При изменении мембранного потенциала меняется величина действующей на сенсор силы, в результате эта часть ионного канала перемещается и меняет вероятность открывания или закрывания

ворот, действующих по принципу «всё или ничего». Скачок напряжения на мембране, создаваемый при измерениях методом фиксации потенциала, приводит к тому, что большое число каналов открывается. Через них проходит больше зарядов, а значит, в среднем, протекает больший ток. Процесс роста проводимости канала определяется увеличением вероятности перехода канала в открытое состояние, а не увеличением диаметра открытого канала.

Ионные каналы могут быть чувствительны и к другим физическим воздействиям: механическим деформациям, связыванию химических веществ и т.д. В этом случае они являются структурной основой, соответственно, механорецепторов, хеморецепторов и т.д.

Ион-селективный канал состоит из следующих частей:

1) погруженной в бислой белковой части, имеющей субъединичное строение;

2) селективного фильтра, образованного отрицательно заряженными атомами кислорода, которые жестко расположены на определенном расстоянии друг от друга и пропускают ионы только определенного диаметра;

3) воротной части.

Нормальное положение ворот натриевого канала – закрытое. Под действием электрического поля увеличивается вероятность открытого состояния, ворота открываются, и поток гидратированных ионов получает возможность проходить через селективный фильтр.

Перенос ионов через мембраны описывает уравнение Нернста-Планка. Уравнение отражает два основных движения силы переноса при пассивном транспорте: градиент концентрации (то есть диффузия, движущей силой которой является тепловое движение) и градиент электрического потенциала (движущей силой является электрическое поле). В отдельных случаях возможна конкуренция этих процессов, и перенос, например, возможен от меньшей концентрации к большей за счет преобладания электрической составляющей.

$$I = -U_m RT\frac{dC}{dx} - U_m CZF\frac{d\varphi}{dx} \qquad (8.6)$$

где U_m - подвижность ионов, R – универсальная газовая постоянная, T - температура, C - концентрация иона, Z - электрический заряд, F - число Фарадея (F=96500 Кл/моль), φ - электрический потенциал.

8.5. Активный транспорт веществ

Активный транспорт – это перенос вещества из мест с меньшим значением электрохимического потенциала в места с его большим значением.

Активный транспорт в мембране сопровождается ростом энергии и не может идти самопроизвольно, а только в сопряжении с процессом гидролиза аденозинтрифосфорной кислоты (АТФ), то есть за счет затраты энергии, запасенной в макроэргических связях АТФ.

Активный транспорт веществ через биологические мембраны имеет огромное значение. За счет него в организме создаются градиенты концентраций, градиенты электрических потенциалов, градиенты давления и т.д., поддерживающие жизненные процессы, т.е. с точки зрения термодинамики активный перенос удерживает организм в неравновесном состоянии, поддерживает жизнь.

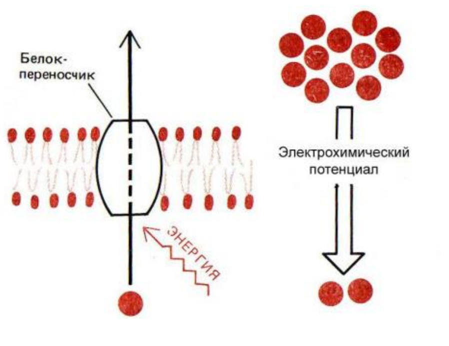


Рис. 8.9 Активный транспорт

Согласно современным представлениям, в биологических мембранах имеются **ионные насосы,** работающие за счет свободной энергии гидролиза АТФ, – специальные системы интегральных белков (транспортные АТФазы). В настоящее время известны три типа электрогенных ионных насосов, осуществляющих активный перенос ионов через мембрану.

Перенос ионов транспортными АТФазами происходит вследствие сопряжения процессов переноса с химическими реакциями, за счет энергии метаболизма клеток.

При работе K^+- Na^+-АТФазы за счет энергии, освобождающейся при гидролизе каждой молекулы АТФ, в клетку переносится два иона калия и одновременно из клетки выкачиваются три иона натрия. Таким образом, создается повышенная по сравнению с межклеточной средой концентрация в клетке ионов калия и пониженная натрия, что имеет огромное физиологическое значение.

В Ca^{2+}-АТФазе за счет энергии гидролиза АТФ переносятся два иона кальция, а в H^+-помпе – два протона.

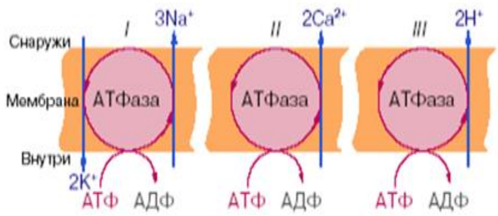


Рис. 8.10 Виды ионных насосов: *I* – K^+-Na^+- АТФаза в цитоплазматических мембранах (K^+-Na^+-насос); *II* – Ca^{2+}-АТФаза (Ca^{2+}-насос); *III*- H^+-АТФаза в энергосопрягающих мембранах митохондрий, хлоропластов (H^+-насос, или протонная помпа).

Активный транспорт протонов может осуществляться как с помощью подвижных переносчиков, так и через мембранные каналы.

Протонные каналы представляют собой интегральные белки, образующие внутреннюю пору, где содержатся участки, к которым могут присоединяться протоны. Энергия АТФ расходуется на изменение конформации белковых молекул, вследствие чего сродство одних участков связывания к протонам понижается, а других - увеличивается, что заставляет протон перескочить на другой участок канала, сродство которого к протону на данный момент выше. Путем таких перескоков с одного участка связывания на другой ион водорода пересекает мембрану.

Тестовый контроль

8.1. Толщина биологической мембраны

A) 1 нм

B) 0,1 мкм

C) 10 нм

D) 10 мкм

8.2. Липидная часть биологической мембраны находится в следующем физическом состоянии

A) Жидком аморфном

B) Твердом кристаллическом

C) Твердом аморфном

D) Жидкокристаллическом

8.3. Некоторые патологические процессы (отек легкого) сопровождаются утолщением тканевых мембран, но разность концентраций веществ по обе стороны мембраны остается неизменной. При этом транспорт веществ в организме

A) Замедляется

B) Усиливается

C) Не изменяется

D) Становится равным нулю

8.4. Холестерин встроился в фосфолипидный бислой клеточной мембраны. при этом вязкость этого слоя

A) уменьшается, проницаемость мембраны увеличивается

B) не изменится, проницаемость не изменится

C) увеличивается, проницаемость уменьшается

D) увеличивается, проницаемость увеличивается

8.5. Вещество, которому присуща простая физическая диффузия через мембрану под действием только концентрационного градиента

A) Кислород

B) Глюкоза

C) Ионы калия

D) Ионы натрия

8.6. Укажите пример активного транспорта

A) Диффузия

B) Осмос

C) Фильтрация

D) Протонная помпа

8.7. Уравнение Фика описывает транспорт

A) Пассивный

B) Активный

C) Электролитов

D) Ионов

8.8. Уравнение Нернста-Планка описывает транспорт

A) молекул

B) нейтронов

C) ионов

D) активный

8.9. Уравнение Фика записывается так

A) $I = DZR\frac{dC}{dx}$

B) $I = -D\frac{dC}{dx}$

C) $I = D\frac{dC}{dt}$

D) $D = U_m \cdot R \cdot T$

8.10. Латеральная диффузия - это диффузия

A) Трансмембранная

B) Флип-флоп

C) Молекул в плоскости мембран

D) Поперечная

8.11. Можно наблюдать электродиффузию

A) любых электрически нейтральных частиц

B) молекул фосфолипидов

C) ионов

D) если градиент потенциала равен нулю

8.12. Что является одной из особенностей облегченной диффузии

A) Происходит медленнее, чем простая физическая диффузия

B) Использование энергии АТФ

C) Наличие молекулы переносчика

D) Наличие градиента потенциала

8.13. Для обеспечения активного транспорта веществ необходим

A) Источник свободной энергии

B) Градиент концентрации

C) Переносчик данного вещества

D) Градиент потенциала

8.14. Na^+- K^+ насос переносит

A) $3K^+$ наружу, $2Na^+$ внутрь клетки

B) $3Na^+$ внутрь клетки, $2K^+$ наружу

C) $3Na^+$ наружу, $2K^+$ внутрь клетки

D) $3K^+$ внутрь клетки, $2Na^+$ наружу

8.15. Функция биологических мембран, обеспечивающая определенное взаимное расположение и ориентацию мембранных белков

A) Механическая

B) Информационная

C) Специфическая

D) Матричная

8.16. Общая площадь всех биологических мембран в организме человека составляет порядка

A) 10000 $м^2$

B) 10 $м^2$

C) 1 $м^2$

D) 100 $м^2$

8.17. Как называется функция биологических мембран, обеспечивающая селективный, регулируемый, пассивный и активный обмен веществом с окружающей средой?

A) Механическая

B) Рецепторная

C) Барьерная

D) Матричная

8.18. В чем заключается энергетическая функция биологических мембран?

A) синтез АТФ на внутренних мембранах митохондрий

B) активный транспорт веществ с затратой энергии АТФ

C) в выравнивании концентрации ионов внутри и снаружи клетки

D) в генерации биопотенциалов

8.19. Что обеспечивает механическая функция биологических мембран?

A) облегченную диффузию

B) прочность и автономность клетки

C) активный транспорт веществ

D) деление клетки

8.20. Способность молекул фосфолипидов самопроизвольно формировать бислои в воде обусловлена их …свойствами

A) гидрофобными

B) гидрофильными

C) жидкокристаллическими

D) амфифильными

8.21. Генерация биопотенциалов – это функция

A) белковых молекул

B) молекул переносчиков

C) биологических мембран

D) молекул АТФ

8.22. Интегральные белки

A) пронизывают биологическую мембрану

B) неподвижно закреплены на поверхности мембраны

C) находятся внутри клетки

D) локализованы на внешней стороне биологической мембраны

8.23. Концентрация вещества в клетке C_i больше, чем снаружи C_o. Что будет с концентрацией, если долго происходит только пассивный транспорт?

A) не изменится

B) $C_i = C_o$

C) $C_i > C_o$

D) $C_i < C_o$

8.24. Концентрация вещества в клетке C_i больше, чем снаружи C_o. Что будет с концентрацией, если происходит только активный транспорт?

A) $C_i \leq C_o$

B) $C_i = C_o$

C) $C_i > C_o$

D) $C_i < C_o$

8.25. Проницаемость мембраны зависит от её толщины

A) прямо пропорционально

B) обратно пропорционально

C) не зависит

D) прямо пропорциональна квадрату толщины

8.26. Проницаемость биологической мембраны зависит от коэффициента диффузии

A) прямо пропорционально

B) обратно пропорционально

C) не зависит

D) обратно пропорциональна квадрату коэффициента диффузии

8.27. Коэффициент диффузии зависит от термодинамической температуры

A) прямо пропорционально

B) обратно пропорционально

C) не зависит от температуры

D) обратно пропорционален квадрату термодинамической температуре

8.28. Градиент потенциала электрического поля увеличился в 3 раза. Плотность потока вещества диффундирующих нейтральных молекул

A) увеличился в 3 раза

B) не меняется

C) уменьшается в 3 раза

D) увеличивается в 9 раз

8.29. Градиент потенциала электрического поля увеличился в 2 раза. Плотность потока вещества диффундирующих ионов

A) уменьшится в 2 раза

B) не меняется

C) увеличится

D) увеличивается в 4 раза

8.30. Градиент концентрации нейтральных молекул увеличился в 3 раза. Плотность потока вещества диффундирующих молекул

A) увеличился в 9 раз

B) не меняется

C) уменьшается в 3 раза

D) увеличивается в 3 раза

8.31. Какая из перечисленных функций мембраны является специфической

A) механическая

B) барьерная

C) энергетическая

D) матричная

8.32. Основу структуры биологических мембран составляют

A) слой белков

B) углеводы

C) аминокислоты

D) двойной слой фосфолипидов

E) двойная спираль ДНК

8.33. Протонная помпа (переносит $2H^+$) -это вид

A) активного транспорта

B) осмоса

C) диффузии

D) пассивного транспорта

8.34. Свойства молекул фосфолипидов, входящих в состав биологических мембран

A) часть молекулы гидрофильная, другая-гидрофобная

B) часть белки, другая - гидрофильная

C) часть белки, другая - гидрофобная

D) неполярные

8.35. Возможность слияния биологических мембран друг с другом обусловлена свойством

A) аморфности

B) текучести

C) кристалличности

D) проницаемости

8.36. Согласно жидкостно-мозаичной модели, биологическая мембрана:

A) состоит из монослоя фосфолипидов

B) состоит из двух слоев фосфолипидов с белковым слоем между ними

C) состоит из двух слоев липидов, окруженных сверху и снизу двумя белковыми слоями

D) состоит из слоя липидов с вкраплениями белков и углеводов

8.37. Подвижность диффундирующих молекул, выраженная для моля вещества увеличилась в 2 раза. Коэффициент диффузии при этом

A) не изменился

B) увеличился в 2 раза

C) уменьшился в 2 раза

D) увеличился в 4 раза

8.38. Переход молекул из одного липидного слоя в другой:

A) "флип-флоп"

B) облегченная диффузия

C) активный транспорт

D) латеральная диффузия

E) пассивный транспорт

8.39. Белки находящиеся на поверхности мембраны:

A) Периферические

B) Интегральные

C) Якорные

D) Трансмембранные

E) Липосомы

8.40. Белки, погруженные в липидный слой:

A) Периферические

B) Интегральные

C) Якорные

D) Мембранные

E) Липосомы

8.41. Функции мембранных белков:

A) повышают давления

B) осуществляют сверхтекучесть

C) осуществляют передачу пульсовой волны

D) обеспечивают транспорт гидрофильных веществ через мембрану

8.42. Установите соответствие между названием и видом транспорта

Транспорт	**Виды**
1. Активный 2. Пассивный	А) простая физическая диффузия Б) Ca^{2+} насос В) Протонная помпа Г) облегченная диффузия Д) Na^{+} –K^{+} насос Е) диффузия через белок - канал

8.43. Установите соответствие между названием и видом транспорта

Транспорт через биологическую мембрану с носителем	**Виды**
1) Унипорт 2) Симпорт 3) Антипорт	А) перенос двух компонентов в одном направлении. Б) простая физическая диффузия. В) перенос одного вещества в одном направлении с помощью транспортной молекулы Г**)** перенос двух компонентов в противоположных направлениях

8.44. Установите соответствие между типами функций биомембран и самими функциям

ТИП	**ФУНКЦИИ БИОМЕМБРАН**
1. Общие 2. Специфические	А) транспортная. Б) барьерная. В) матричная Г) генерация биопотенциала. Д) механическая. Е) рецепторная.

Решите задачи

8.45. Плотность потока метиленового синего через модельную липидную мембрану постоянна и равна 0,1 $\frac{\text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$, причем коэффициент диффузии этого вещества через мембрану равен $2 \cdot 10^{-6}$ $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$. Определите градиент концентрации метиленового синего.

8.46. Одна молекула фосфолипида занимает площадь 0,7 нм^2. Сколько молекул содержится в монослое площадью 1 мкм^2?

8.47. Коэффициент диффузии формамида через плазматическую мембрану составляет $1{,}4 \cdot 10^{-8}$см^2/с. Градиент концентрации формамида $2 \cdot 10^9 \ \frac{моль}{\text{м}^4}$. Определите плотность потока формамида через мембрану.

8.48. Концентрация ионов K^+ в клетке кардиомиоцита 0,01 моль/л, при этом норма 150 моль/м^3. Во сколько раз отличается концентрация ионов от нормы?

8.49. Концентрация ионов K^+ внутри клетки 150 моль/м^3, при этом снаружи ионов K^+ в 30 раз меньше. Вычислите градиент концентрации, приняв толщину мембраны равной 10 нм.

8.50. Градиент концентрации ионов $45 \cdot 10^8 \ \frac{моль}{\text{м}^4}$. Определите разность концентраций по обе стороны модельной мембраны, толщина которой 8 нм.

8.51. Определите толщину модельной билипидной мембраны, если разность концентраций ионов натрия 0,055 моль/л, а межповерхностный градиент концентрации $5 \cdot 10^9 \frac{моль}{\text{м}^4}$.

8.52. Определите коэффициент проницаемости биологической мембраны, если плотность потока вещества $0{,}1 \frac{\text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$, при разности концентраций внутри и снаружи клетки 100 ммоль/л.

8.53. При изучении искусственной билипидной мембраны с коэффициентом проницаемости для ионов натрия 10^{-4} м/с создана разность концентраций

120 ммоль/л. Вычислите плотность потока вещества, проходящего через мембрану.

8.54. Мембранный потенциал покоя 60 мВ. Вычислите градиент потенциала, приняв толщину мембраны равной 8 нм. Ответ выразить в системе СИ.

8.55. Найдите коэффициент проницаемости плазматической мембраны Mycoplasma для формамида, если при разнице концентраций этого вещества внутри и снаружи мембраны, равной $5\cdot10^{-4}$ моль/л, плотность потока его через мембрану равна $8\cdot10^{-4}\ \frac{\text{моль}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}$.

8.56. В норме содержание магния в сыворотке крови человека 0,8 ммоль/л. В анализе пациента, указано значение содержания магния в сыворотке крови 0,4 мкмоль/см^3 $\frac{моль}{\text{м}^4}$. Проанализируйте расхождение между нормативным показателем и значением, полученным у пациента.

8.57. Определите коэффициент диффузии ионов натрия через модельную мембрану, если при градиенте концентрации $2\cdot10^8\ \frac{моль}{\text{м}^4}$ плотность потока ионов постоянна и равна $0{,}1\ \frac{\text{моль}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}$.

9. Биоэлектрогенез. Электрические свойства тканей организма

Изучение электрических явлений в биологических тканях берет свое начало еще в XVIII веке, когда Луиджи Гальвани исследовал мышечное сокращение препарата лапок лягушки. Результатом этих исследований стала публикация в 1791 году книги «Трактат об электрических силах в движении мускулов». И хотя его открытия были встречены неоднозначной реакцией его современниками из научного сообщества – чего только стоит его спор с Алессандро Вольта о природе описанных Гальвани явлений – все же, концепция Л. Гальвани позволила последующим поколениям ученых заложить основу современной электрофизиологии.

Одна из важнейших функций биологической мембраны – генерация и передача биопотенциалов. Это явление лежит в основе возбудимости клеток, регуляции внутриклеточных процессов, работы нервной системы, регуляции мышечного сокращения, рецепции.

В процессе жизнедеятельности в клетках и тканях могут возникать разности электрических потенциалов: $\Delta\varphi$

1) окислительно-восстановительные потенциалы – вследствие переноса электронов от одних молекул к другим;

2) мембранные – вследствие градиента концентрации ионов и переноса ионов через мембрану.

Биопотенциалы, регистрируемые в организме, – это в основном мембранные потенциалы.

Мембранным потенциалом называется разность потенциалов между внутренней (цитоплазматической) и наружной поверхностями клеточной мембраны:

$$\varphi_{\text{м}} = \varphi_i - \varphi_o \quad (9.1)$$

Прогресс в исследовании биопотенциалов обусловлен:

1) разработкой микроэлектродного метода внутриклеточного измерения потенциалов;

2) созданием специальных усилителей биопотенциалов (УБП);

3) выбором удачных объектов исследования крупных клеток и среди них гигантского *аксона кальмара.* Диаметр аксона кальмара достигает 0,5 мм, что в 100 – 1000 больше, чем диаметр аксонов позвоночных животных, в том числе человека. Гигантские размеры аксона имеют большое физиологическое значение – обеспечивают быструю передачу нервного импульса по нервному волокну.

Для биофизики гигантский аксон кальмара послужил великолепным модельным объектом для изучения биопотенциалов. В гигантский аксон кальмара можно ввести микроэлектрод, не нанеся аксону значительных повреждений, что позволяет исследовать биопотенциалы in vivo.

Мембранные потенциалы подразделяются на потенциалы покоя и потенциалы действия.

Потенциал покоя – неизменяемая во времени разность электрических потенциалов, регистрируемая между внутренней и наружной поверхностями мембраны живой клетки в невозбужденном состоянии.

Потенциал покоя определяется разной концентрацией ионов по разные стороны мембраны, различием проницаемости мембраны для катионов и анионов и диффузией ионов через мембрану. Если концентрация какого-либо иона внутри клетки Ci отлична от концентрации этого иона снаружи C_O и мембрана проницаема для этого иона, возникает поток заряженных частиц через мембрану, вследствие чего нарушается электрическая нейтральность системы, образуется разность потенциалов внутри и снаружи клетки $\varphi_{\text{м}} = \varphi_i - \varphi_o$, которая будет препятствовать дальнейшему перемещению ионов через мембрану. Потенциал покоя существует в каждой живой клетке.

9.1. Ионная теория электрогенеза Бернштейна

Современная теория электрогенеза вытекает исторически из положений Н.А. Бернштейна (1940), связавшего впервые ионную проницаемость мембран с природой биопотенциалов. Ее основные положения:

1. В состоянии покоя мембрана проницаема только для ионов калия.

2. Ионы калия, выходя из клетки, создают потенциал, величина которого рассчитывается по уравнению В. Нернста:

$$\varphi_{\text{м}} = \varphi_i - \varphi_o = -\frac{RT}{ZF} \cdot \ln\left(\frac{C_i}{C_o}\right), \qquad (9.2)$$

где R – универсальная газовая постоянная, R=8,31 Дж/моль·К,

F – постоянная Фарадея, F=96500 Кл/моль,

T – термодинамическая температура (в кельвинах),

Z – валентность (заряд) иона,

Ci и Co – концентрации внутриклеточных (i) и внеклеточных ионов (o), соответственно.

3. Этот потенциал равновесный, так как различие концентраций Ci и Co присутствует в клетках постоянно. Изменение электрохимического потенциала при этом равно нулю.

В качестве доказательства своей теории Н.А. Бернштейн указывал на зависимость мембранного потенциала от температуры, изменений внеклеточной концентрации ионов калия $[K^+]$o, т.е. от расчетных показателей уравнения В. Нернста.

9.2. Теория постоянного поля и потенциал покоя (ПП)

Современные представления об электрогенезе основаны на положениях теории постоянного поля. Ее основные создатели – А.Ходжкин, Э.Хаксли и Б.Кац (1949) разработали ряд упрощений для возможного анализа протекания электрических процессов на мембране:

1. Ионы движутся в мембране против градиента концентрации и

электрического поля, как в растворе.

2. Напряженность электрического поля в мембране постоянна и потенциал уменьшается линейно относительно ее толщины по мере удаления от источника электрического поля.

3. Мембрана гомогенна, имея постоянную диэлектрическую проницаемость по всей толщине.

4. Концентрация ионов в мембране на границе с раствором пропорциональна концентрации ионов в самом растворе.

Предполагая, что при потенциале покоя (ПП) суммарный ионный ток равен нулю, Гольдман, Ходжкин и Катц вывели уравнение:

$$\varphi_{м} = -\frac{RT}{ZF} \cdot \ln \frac{P_{K^+}[K^+]_i + P_{Na^+}[Na^+]_i + P_{Cl^-}[Cl^-]_o}{P_{K^+}[K^+]_o + P_{Na^+}[Na^+]_o + P_{Cl^-}[Cl^-]_i}, \qquad (9.3)$$

где R – универсальная газовая постоянная, R=8,31 Дж/моль·К,

F – постоянная Фарадея, F=96500 Кл/моль,

T – термодинамическая температура (в кельвинах),

Z – валентность (заряд) иона,

P_{K^+} – проницаемости мембраны для ионов калия K^+, P_{Na^+} – натрия Na^+ и P_{Cl^-} – хлора Cl^-

$[\ ]_i$ и $[\ ]_o$ – концентрации соответствующих ионов внутри (i) и снаружи клетки (o), соответственно.

Для гигантского аксона кальмара в покое P_{K+}: P_{Na+}: P_{Cl-}=1: 0,04 : 0,45.

Таким образом, ПП имеет в основном калиевую природу, что и определяет его вклад в изменения мембранного потенциала при изменении концентрации ионов калия. Распределение ионов между клеткой и средой при ПП устанавливается на постоянном уровне, и суммарный ионный ток ионов через мембрану равняется нулю, что называется стационарным состоянием.

В покое внутри клетки велика концентрация ионов калия, а снаружи клетки его мало. Концентрация же ионов натрия, напротив, в клетке низкая, а в межклеточной жидкости гораздо выше. Калиевые каналы в покое открыты. Из-за разности концентраций ионы калия через открытые каналы выходят из клетки. Натриевые же каналы в покое закрыты. Внутри клетки образуется недостаток положительных зарядов. Как несложно понять, мембранный потенциал покоя отрицателен. В таком случае говорят, что клетка поляризована.

Раздражитель – фактор внешней или внутренней среды, воздействующий на живую ткань и ее клетки и вызывающий ответную реакцию.

Раздражением же называют как сам процесс воздействия раздражителя, так и результат этого воздействия.

Любая живая клетка должна отвечать на действие раздражителя раздражением. Это является базовым свойством всех живых клеток. Однако, некоторые виды клеток (клетки нервной и мышечной тканей, а также железистого эпителия) обладают особым свойством. В ответ на действие раздражителя они способны к возбуждению, а сами эти ткани называются возбудимыми.

Возбуждение представляет собой активный физиологический процесс, возникающий в ткани под действием раздражителя, при этом изменяются физиологические свойства ткани и наблюдается функциональное отправление ткани. Для мышцы возбуждение проявляется в сокращении, для нервной ткани — в распространении нервного импульса, для железистой — в выделении секрета.

Известны две формы возбуждения. Местное (не распространяющееся), которое еще называют *локальным ответом*, и импульсное (распространяющееся), более известное как потенциал действия. Их сравнительная характеристика представлена в таблице 9.1.

Таблица 9.1

Сравнительная характеристика локального ответа и потенциала действия

Локальный ответ	Потенциал действия
Порог раздражения отсутствует	Порог раздражения есть
Латентный период отсутствует	Латентный период присутствует – локальный ответ
Величина зависит от силы раздражителя	Амплитуда не зависит от силы раздражителя (развивается по закону «всё или ничего»)
Рефрактерность отсутствует	Наличие рефрактерности
Способность к суммации	Суммация отсутствует
Распространяется на небольшие расстояния	Распространяется на всю протяженность структуры
Распространяется с уменьшением амплитуды	Распространяется без снижения амплитуды
Возникает и распространяется за счет энергии раздражителя. Медленно	Возникает и распространяется за счет энергии мембраны. Быстро

Потенциалом действия (ПД) называется кратковременный (длительностью от 1 мс до 10 мс) электрический импульс, обусловленный изменением ионной проницаемости мембраны и связанный с распространением по нервам и мышцам волны возбуждения.

В опытах по исследованию потенциала действия (рис. 9.1) использовали два микроэлектрода, введенных в аксон. На первый микроэлектрод подается импульс с амплитудой V от генератора Г прямоугольных импульсов, меняющий мембранный потенциал. Мембранный потенциал измеряется при помощи второго микроэлектрода высокоомным регистратором напряжения Р.

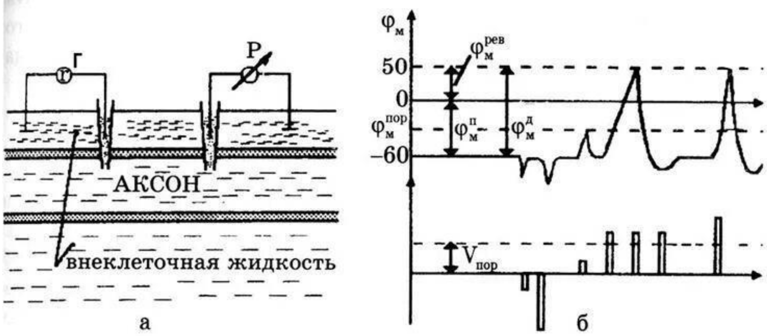


Рисунок 9.1 – Исследование потенциала действия: а – схема опыта (Г – генератор импульсов, Р – регистратор напряжения); б – потенциал действия (мембранные потенциалы, регистрируемые в ходе опыта: $\varphi^{\text{п}}$ – потенциал покоя, $\varphi^{\text{рев}}$ – потенциал реверсии, $\varphi^{\text{д}}$ – амплитуда потенциала действия, $\varphi^{\text{пор}}$– пороговый потенциал)

Возбуждающий импульс вызывает лишь на короткое время смещение мембранного потенциала, который быстро пропадает и восстанавливается потенциал покоя. В том случае, когда напряжение возбуждающего импульса смещается в отрицательную сторону V<0, он сопровождается гиперполяризацией мембраны. Мембранный потенциал аксона в данном случае становится еще более отрицательным $\varphi_{\text{м}} < \varphi_{\text{м}}^{\text{п}}$. Также не формируется потенциал действия, когда возбуждающий импульс положительный (деполяризующий), но его амплитуда меньше порогового значения $V<V^{\text{пор}}$. В таком случае на мембране возникает лишь локальный ответ $\varphi_{\text{м}} < \varphi_{\text{м}}^{\text{пор}}$, потенциал действия не развивается.

Однако, если амплитуда положительного, деполяризующего импульса окажется больше порогового значения $V>V^{\text{пор}}$, мембранный потенциал становится больше порогового мембранного потенциала, и в мембране развивается процесс, в результате которого происходит резкое повышение мембранного потенциала, генерируется потенциал действия $\varphi_{м}^{д}$. Мембранный потенциал $\varphi_{М}$ даже меняет свой знак – становится положительным ($\varphi_{М}$>0 на величину $\varphi_{м}^{рев}$).

Также в ходе эксперимента подавали дополнительные деполяризующие импульсы на аксон, уже находившийся в процессе генерации потенциала действия. При этом форма потенциала действия никак не менялась. Что подтверждает наличие рефрактерности (невосприимчивости к новым возбуждающим стимулам в процессе формирования потенциала действия, невозбудимости).

Еще можно заметить, что независимо от того, насколько величина деполяризующего импульса больше порогового значения $V>V^{пор}$, величина потенциала действия оставалась постоянной.

Характерные свойства потенциала действия:

1) наличие порогового значения деполяризующего потенциала – критического уровня деполяризации;

2) закон «все или ничего», то есть, если деполяризующий потенциал больше или равен пороговому, развивается потенциал действия, амплитуда которого не зависит от амплитуды возбуждающего импульса и нет потенциала действия, если амплитуда деполяризующего потенциала меньше пороговой;

3) есть период рефрактерности, невозбудимости мембраны во время развития потенциала действия и остаточных явлений после снятия возбуждения;

4) в момент возбуждения резко уменьшается электрическое сопротивление мембраны (у аксона кальмара от 0,1 Ом • м^2 в покое до 0,0025 Ом • м^2 при возбуждении).

Рассмотрим подробнее структуру потенциала действия (рис. 9.2).

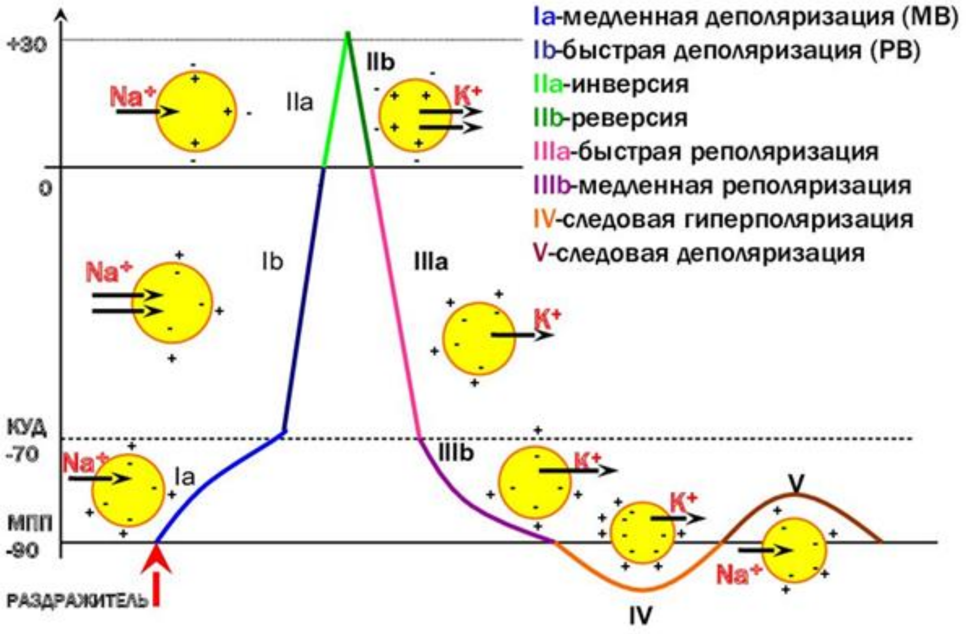


Рисунок 9.2 – Фазы потенциала действия и их связь с током ионов через мембрану

В покое мембрана клетки поляризована, то есть разность потенциалов между наружной и внутренней средой клетки отрицательна ($\varphi_{м} < 0$).

Выделяют две фазы потенциала действия – фазу деполяризации и фазу реполяризации. Положительное значение мембранного потенциала носит название потенциала инверсии (overshoot).

Первая фаза ПД (фаза деполяризации) связана с потоком ионов натрия из окружающей среды (где их концентрация больше) в клетку (где их концентрация меньше) через потенциалзависимые натриевые каналы.

Следует отметить, что на первых порах (пока мембранный потенциал отрицателен) электрический градиент способствует входу натрия в клетку.

После достижения нулевого значения трансмембранной разности потенциалов входящий поток ионов натрия не прекращается (так как сохраняется концентрационный градиент ионов натрия на мембране), и он будет продолжаться до достижения натриевого равновесного потенциала.

К моменту, когда входящий ток натрия прекращается, проницаемость мембраны для ионов калия достигает максимума, и развивается выходящий калиевый ток, возвращающий мембранный потенциал к исходному уровню.

Фаза деполяризации обусловлена входящим током ионов натрия через натриевые потенциал-зависимые каналы, а реполяризация – выходящим током ионов

$$P_{K+}: P_{Na+}: P_{Cl-}=1: 20: 0,45$$

Положительный потенциал реверсии имеет натриевую природу, поскольку именно диффузия натрия создает положительную разность потенциалов между внутренней и наружной поверхностями мембраны.

Можно менять амплитуду импульса потенциала действия, изменяя концентрацию натрия в наружной среде. При уменьшении наружной концентрации натрия амплитуда потенциала действия уменьшается, так как меняется потенциал реверсии. Если из окружающей клетку среды полностью удалить натрий, потенциал действия вообще не возникает.

Возбуждение мембраны описывается уравнением Ходжкина-Хаксли:

$$I_m = C_m \frac{d\varphi_m}{dt} + \sum I_i \quad (9.4)$$

где I_m – ток через мембрану;

C_m – электроемкость мембраны;

$\frac{d\varphi_m}{dt}$ – градиент электрического потенциала на мембране (во времени);

ΣI_i – сумма ионных токов через мембрану.

Электрический ток через мембрану складывается из ионных токов: ионов калия, натрия и других ионов (в том числе хлора), тока утечки, а также емкостного тока. Емкостный ток обусловлен перезарядкой конденсатора, который представляет собой мембрана, перетеканием зарядов с одной ее поверхности на другую. Его величина определяется количеством заряда, перетекающего с одной обкладки на другую за единицу времени. Каждый ионный ток определяется разностью мембранного потенциала и равновесного нернстовского потенциала, создаваемого диффузией ионов данного типа.

В целом, согласно теории Ходжкина-Хаксли, возбуждение элемента мембраны связано с изменением проводимости мембраны для ионов натрия и калия. Проводимости мембраны сложным образом зависят от мембранного потенциала и времени.

Если в каком-либо участке возбудимой мембраны сформировался потенциал действия, мембрана деполяризована, возбуждение распространяется на другие участки мембраны.

Локальные токи образуются и внутри клетки, и на наружной ее поверхности. Локальные электрические токи приводят к повышению потенциала внутренней поверхности невозбужденного участка мембраны и к понижению наружного потенциала невозбужденного участка мембраны, оказавшегося по соседству с возбужденной зоной. Таким образом, отрицательный потенциал покоя уменьшается по абсолютной величине, т.е. повышается. В областях, близких к возбужденному участку, мембранный потенциал повышается выше порогового значения. Под действием изменения мембранного потенциала открываются натриевые каналы, и дальнейшее повышение происходит уже за счет потока ионов натрия через мембрану. Происходит деполяризация мембраны, развивается потенциал действия. Затем возбуждение передается дальше на покоящиеся участки мембраны.

В дальнейшем Ходжкин и Хаксли предложили математическую модель, которая описывала изменения проводимостей, а, следовательно, и токов ионов натрия и калия через мембрану в процессе возбуждения.

Основные постулаты модели Ходжкина и Хаксли:

1) в мембране существуют отдельные каналы для переноса ионов натрия и калия;

2) во внутренней структуре мембраны существуют некоторые заряженные частицы, управляющие проводимостью каналов. В зависимости от величины напряженности приложенного электрического

поля эти частицы могут передвигаться в мембране, и тем самым увеличивать или уменьшать потоки ионов натрия и калия через каналы.

Таким образом, Ходжкин и Хаксли обосновали ионную теорию возбудимых мембран и смогли удовлетворительно описать в рамках этой теории изменения ионной проводимости и процесс генерации потенциала действия нервной клетки. Модель Ходжкина-Хаксли не объясняла природу активирующих и блокирующих частиц и механизм их влияния на проводимость ионного канала.

Физическая интерпретация модели Ходжкина-Хаксли требует наличия внутри мембраны заряженных частиц, причем эти частицы должны передвигаться в зависимости от внешнего электрического поля. Таким образом, для подтверждения второго постулата модели необходимо зарегистрировать перемещения заряженных частиц внутри мембраны при изменении мембранного потенциала, т.е. зарегистрировать т.н. воротные токи. Трудность обнаружения воротных токов заключалась в том, что активирующих частиц внутри мембраны очень мало и, следовательно, в низком значении воротного тока по сравнению с ионными токами, проходящими через мембрану.

9.3. Распространение потенциала действия по нервному волокну

Проведение нервного импульса связано с распространением ПД по нервному волокну. Существует два типа нервных волокон, принципиально разнящихся по типу распространения ПД: безмиелиновые и миелиновые.

В безмиелиновом волокне невозбужденный участок, соседствующий с участком, сгенерировавшим ПД, в свою очередь воспринимает электрический сигнал от возбужденного участка и генерирует собственный ПД, который затем распространяется далее. Локальные токи возникают в аксоне и в окружающем растворе и движутся как лесной пожар от возбужденных участков к невозбужденным. Такой способ передачи характеризуется достаточно низкой скоростью распространения (порядка 20 м/с). Кроме того, при таком способе передачи происходит постепенное затухание сигнала – распространение с декрементом.

В миелинизированных волокнах распространение ПД идет до 10 раз быстрее, чем в безмиелиновых, кроме того, без затухания. Этому способствуют электрические свойства миелина, который является диэлектриком. Диффузия ионов сквозь миелин невозможна, поэтому деполяризация передается от возбужденного к поляризованному (невозбужденному) перехвату Ранвье при помощи круговых токов, появляющихся из-за возникшей разности потенциалов. При этом возбуждение распространяется сальтаторно, скачкообразно.

9.4. Электрографии

В медицине исследование электрических полей, созданных биопотенциалами органов и тканей, называется электрографией. Выделяют следующие виды электрографий по исследуемому объекту (органу или ткани):

- ЭКГ – электрокардиография – регистрация биопотенциалов, возникающих в сердечной мышце при ее возбуждении;
- ЭРГ – электроретинография – регистрация биопотенциалов сетчатки глаза, возникающих в результате воздействия на глаз;
- ЭЭГ – электроэнцефалография – регистрация биоэлектрической активности головного мозга;
- ЭМГ – электромиография – регистрация биоэлектрической активности мышц.

Все названные электрограммы имеют малую амплитуду и низкую частоту. Их параметры представлены в таблице 9.2.

Таблица 9.2

Амплитудно-частотные параметры сигналов различных видов электрограмм

Биопотенциалы	Интервал частот, Гц	Амплитуда сигналов, мВ
ЭКГ	0,2 – 120	0,3 – 3,0
ЭЭГ	1 – 300	0,005 – 0,3
ЭМГ	3 – 600	0,03 – 1,5
ЭГГ	0,05 – 0,2	0,2 – 1,0

Выделяют две задачи электрографии – прямую и обратную. Прямая задача заключается в выяснении механизма возникновения электрограмм и расчет электрического потенциала, созданного работающим органом на заданной поверхности тела. Обратная же задача (или как ее еще называют, диагностическая) заключается в выявлении состояния органа по характеру его электрограммы.

Практикуется и лечебное воздействие на ткани и органы внешними электрическими импульсами при электростимуляции.

9.5. Пассивные электрические свойства биологических тканей

Если рассматривать живые биологические ткани по их электрическим свойствам, то можно заключить, что они являются композиционными средами, в которых объемно сочетаются разнородные по электрическим свойствам части.

Электрические свойства биологических тканей зависят от их состава и определяются прежде всего электропроводностью.

Электропроводность – это способность тканей пропускать электрический ток под воздействием электрического поля.

Электропроводность (G) обратно пропорциональна электрическому сопротивлению (R, $[\text{Ом}]$) (9.5) и измеряется в сименсах.

$$G = \frac{1}{R} \ [\text{См}] \tag{9.5}$$

Электропроводность напрямую зависит от наличия и количества свободных электрических зарядов (в биологической ткани – свободных ионов), которые и будут создавать в материале ток проводимости. Так как в биологической ткани свободные ионы, в основном, образуются в процессе электролитической диссоциации молекул электролита в воде, то наиболее электропроводными биоматериалами являются цитоплазма, межклеточная жидкость, спинномозговая жидкость, лимфа и кровь. Наименьшая же электропроводность наблюдается у кости и сухой кожи, в которых содержится минимум растворителя и свободных ионов.

Электрическое сопротивление биологической ткани можно рассчитать по формуле (9.6):

$$R = \frac{\rho l}{S} \ [\text{Ом}] \tag{9.6}$$

Где ρ – удельное сопротивление ткани электрическому току $[\text{Ом} \cdot \text{м}]$, (табл. 9.3)

l – длина участка ткани, по которому идет ток

S – площадь участка ткани, по которому идет ток.

Таблица 9.3

Удельные сопротивления различных тканей и жидкостей организма

Ткань	**ρ, Ом·м**
Спинномозговая жидкость	0,55
Кровь	1,66
Мышцы	2
Ткань мозговая и нервная	14,3
Ткань жировая	33,3

Кожа сухая	10^5
Кость без надкостницы	10^7

По своим электрическим свойствам ткани разнородны, их можно разделить на две группы – проводники и диэлектрики. Сравнительная характеристика их свойств представлена в табл. 9.4.

Таблица 9.4

Сравнительная характеристика видов биологических структур по их электрическим свойствам

Проводники	**Диэлектрики**
Внутриклеточная и межклеточная жидкость, спинномозговая жидкость, лимфа, кровь	Биомембраны, ткани, бедные свободными зарядами
содержат большое количество свободных зарядов (ионы)	обладают преимущественно связанными зарядами (диполи)
определяют электропроводность биологических тканей ρ	определяют поляризацию биологических тканей ε
Под действием внешнего электромагнитного поля в них возникают токи проводимости	Под действием внешнего электромагнитного поля в них возникают токи смещения

9.6. Диэлектрические свойства живых тканей

Диэлектрики – это вещества, в которых нет свободных носителей зарядов, а только связанные заряды – диполи.

Если во внешнее электрическое поле E_o поместить диэлектрик, то его полярные молекулы будут ориентироваться вдоль силовых линий поля. Напряженность созданного ими электрического поля E_p, направленная против внешнего поля E_o, не компенсирует внешнее поле полностью (в отличие от проводников). Поле внутри диэлектрика E не уменьшается до нуля, а просто ослабевает в ε раз: $E = \frac{E_o}{\varepsilon}$, где ε относительная диэлектрическая проницаемость среды. Относительная диэлектрическая проницаемость ε показывает, во сколько раз напряженность электрического поля в диэлектрике меньше, чем в вакууме. Диэлектрическая проницаемость является безразмерной величиной.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$$

Это явление называется поляризацией диэлектрика.

Поляризация – это процесс перемещения связанных зарядов под действием электрического поля и образование вследствие этого ЭДС, направленной против внешнего поля. За счет этого уменьшается напряженность электрического поля в объекте. Поляризация приводит к образованию объемного дипольного момента, к появлению токов смещения.

Различают три вида поляризации:

Ориентационная или дипольная характерная для диэлектриков с полярными молекулами (вода, керосин). Готовые диполи ориентируются вдоль силовых линий поля.

Электронная поляризация – смещение электронных облаков атомов и молекул. Этот вид поляризации, характерный для неполярных диэлектриков, состоит из двух этапов: вначале из нейтральных атомов образуются диполи под действием сил электрического поля и затем происходит ориентация диполей вдоль силовых линий поля.

Ионная поляризация характерна для кристаллических диэлектриков.

Диэлектрические свойства живых биологических тканей определяются наличием в них:

Диполей воды;

Макромолекул полярных и неполярных, различных по размеру;

Компартментов (отсеков). Удельное электрическое сопротивление биологических мембран велико, а внутриклеточной и межклеточной жидкости – мало. Компартмент ведет себя как гигантский диполь.

Диэлектрическая проницаемость ε характеризует способность к пространственному смещению структур биологических тканей и образованию объемного дипольного момента.

Поляризация живой ткани характеризуется тремя аспектами:

Макрополяризация или поверхностная поляризация за счет наличия компартментов. Возникает внутреннее электрическое поле E_p, направленное против внешнего. В макрополяризации участвует двойной электрический слой, формирующийся вблизи поверхности биологических мембран. Одна его часть образованна отрицательными зарядами гидроксильных и карбоксильных групп мембранных гликолипопротеидов, а вторая электрически связанными с ними подвижными положительными зарядами. При наложении внешнего электрического поля *Eo* положительные заряды смещаются вдоль поверхности биологических мембран и увлекают за собой поверхностный, относительно клетки, слой воды.

Ориентационная поляризация макромолекул белков, которые являются диполями и под действием электрического поля E_0 начинают ориентироваться вдоль силовых линий поля, ослабляет напряженность внешнего поля.

9.7. Поляризация молекул воды в белковых комплексах.

Дисперсия диэлектрической проницаемости – это зависимость диэлектрической проницаемости ε от частоты υ внешнего электрического поля. $\varepsilon = f(\upsilon)$ (Шванн, 1963). С увеличением частоты диэлектрическая проницаемость уменьшается (рис. 9.3), так как поляризационные явления сказываются меньше.

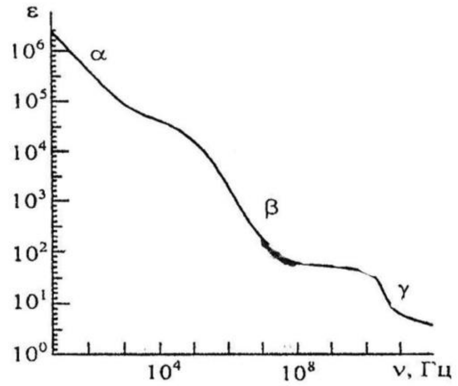


Рисунок 9.3 - Дисперсия диэлектрической проницаемости скелетной мышцы

Выделяют несколько областей дисперсии ε: $\alpha-, \beta$-, γ −дисперсии (рис. 9.3). Это области резких изменений ε при изменении частоты внешнего электрического поля. Наличие этих областей указывает на различие механизмов поляризации биологических тканей в разных частотных диапазонах электромагнитного поля, воздействующего на них. Для каждого элемента: диполя, макромолекулы, внутриклеточного компартмента и т.п. характерна своя частота ориентационной поляризации.

Механизмы возникновения областей дисперсии следующие:

α - дисперсия занимает область низких частот примерно до 10^3-10^4 Гц и обусловлена поляризацией целых клеток (рис. 9.3). В этом диапазоне очень силен эффект поверхностной поляризации в результате диффузии ионов на биологических мембранах клеток и компартментов. Это требует относительно большого времени. Емкостное сопротивление мембран $X_c = \frac{1}{2\pi\upsilon C}$ на этих частотах очень большое, и ток низкой частоты протекает практически по межклеточной жидкости. С увеличением частоты внешнего электрического поля ориентация этих гигантских диполей запаздывает по отношению ко внешнему полю, и оно выпадает из явления поляризации.

β -дисперсия проявляется при действии переменного электрического поля частот от 1кГц до 10^7-10^8 Гц. Она обусловлена структурной поляризацией клеточных мембран, в которой участвуют белковые макромолекулы, глобулярные гидроксильные белки, фосфолипиды. Снижение ε в этом диапазоне связано с тем, что из явления поляризации начинает выпадать ориентационная поляризация этих макромолекул. Белковые молекулы не успевают поворачиваться по мере повышения частоты внешнего электрического поля.

γ -дисперсия занимает частотный интервал 10^9 – 10^{11} Гц. Данные частоты соответствуют частоте ориентационной поляризации микромолекул воды (около $2 \cdot 10^{10}$ Гц). γ -дисперсия обусловлена процессом ориентационной поляризации молекул свободной и связанной воды, а также низкомолекулярных веществ типа сахаров и аминокислот.

Уменьшение диэлектрической проницаемости ε связанно с выключением этого комплекса на этих частотах: даже мелкие молекулы воды не успевают совершать повороты с такой частотой. Основные диэлектрические потери происходят именно в свободной и связанной воде в белковых молекулах при действии на организм полей этого диапазона.

Импеданс тканей организма Z – комплексное сопротивление переменному току. Это геометрическая сумма омического R и емкостного X_c сопротивления живых клеток. Емкостное сопротивление рассчитывается по формуле $X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \upsilon C}$, где υ – частота переменного тока, ω - циклическая частота, C – электроемкость. Живые клетки накапливают заряд, образуя за счет двойного липидного слоя клеточной мембраны конденсатор.

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где d – толщина мембраны, ε - диэлектрическая проницаемость биологической мембраны, ε_0 – электрическая постоянная СИ, равная $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

По современным представлениям магнитобиологии индуктивное сопротивление не учитывается.

Наличие в биологических системах емкостных элементов подтверждается тем, что сила тока опережает по фазе приложенное напряжение. Так на частоте 1кГц этот угол сдвига фаз для кожи человека равен 55° для десны - 42°, для эмали зуба – 25°.

Простейшая эквивалентная электрическая схема тканей представляет собой последовательное соединение конденсатора C и резистора R.

Импеданс ткани Z в этом случае рассчитывается по формуле:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 c^2}}$$

Дисперсия электрического импеданса – это зависимость импеданса Z от частоты переменного тока. Z=f(v).

По мере увеличения частоты импеданс живых тканей плавно уменьшается (рис. 9.4).

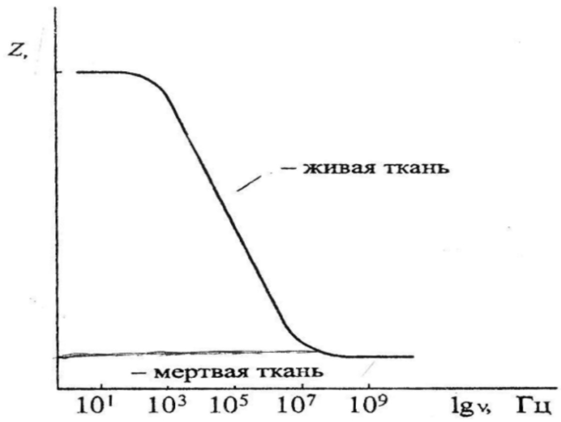


Рисунок 9.4 – кривая дисперсии импеданса живой ткани

Изменение импеданса с частотой связанно с изменением электроемкости, а к изменению электроемкости приводит изменение диэлектрической проницаемости с изменением частоты электрического поля, рассмотренное выше (рис. 9.3).

Дисперсия импеданса биологической ткани – это результат того, что при низких частотах, как и при постоянном токе, электропроводность связана с поляризацией. По мере увеличения частоты поляризационные явления снимаются и сказываются меньше. Дисперсия импеданса, как и способность к поляризации присуща только живым клеткам (рис. 9.4). В мертвой ткани нет частотной зависимости импеданса.

По кривой дисперсии импеданса можно судить об уровне метаболизма и его отклонению от нормы. Различия в частотных зависимостях импеданса имеют место при сравнении здоровой и больной ткани. По этой зависимости можно оценивать жизнеспособность ткани, что важно при пересадке органов.

Коэффициент поляризации К – это отношение значения импеданса на низкой частоте $Z_{НЧ}$ (обычно это 10^2 - 10^3 Гц) к значению импеданса на высокой частоте $Z_{ВЧ}$ (обычно это 10^6 – 10^7 Гц и более; рис. 9.4).

$$K = \frac{Z_{НЧ}}{Z_{ВЧ}}$$

Для живой ткани $K > 1$. Чем выше уровень метаболизма и чем выше положение организма в эволюционном ряду, тем выше коэффициент поляризации. Так К печени млекопитающих равно 10, а *K* печени лягушки 2- 3. *K* роговицы мало, так как ниже метаболизм.

По мере отмирания ткани *K* уменьшается и стремится к 1. Для мертвой ткани $K = 1$.

Тестовый контроль

9.1. Что такое биоэлектрогенез?

A) Процесс фотосинтеза

B) Генерация электрических потенциалов живыми клетками и тканями

C) Процесс клеточного дыхания

D) Транспорт веществ через мембрану

9.2. Кто открыл животное электричество?

A) Вальтер Нернст

B) Алессандро Вольта

C) Луиджи Гальвани

D) Дэвид Гольдман

E) Алан Ходжкин

F) Эндрю Хаксли

G) Бернард Катц

9.3. Разность потенциалов между двумя точками живой ткани, определяющая её биоэлектрическую активность, называется

A) Биоэлектрический потенциал

B) Электрография

C) Градиент концентрации

D) Поток ионов

E) Реография

F) Отведение

G) Импеданс

H) Сопротивление

I) Электропроводность

9.4. Регистрируемые в организме биоэлектрические потенциалы в основном по природе возникновения

A) Мембранные

B) Окислительные

C) Восстановительные

D) Кардиографические

E) Нервные

F) Мышечные

9.5. Биопотенциалы, возникающие вследствие переноса электронов между молекулами, называются

A) Мембранными

B) Окислительно-восстановительными

C) Электрическими

D) Электронными

E) Следовыми

F) Молекулярными

9.6. Единицы измерения мембранного потенциала

A) Ом

B) В

C) Вт

D) А

E) Кл

9.7. Мембранный потенциал покоя представляет собой:

A) заряд мембранных белков

B) заряд ядра клетки

C) разность потенциалов между внутренней и наружной поверхностями мембраны

D) разность потенциалов между органеллами клетки и внутренней поверхностью ее мембраны

9.8. Потенциал покоя – это:

A) Потенциал на внутренней поверхности мембраны нормально функционирующей невозбужденной живой клетки

B) Потенциал на внешней поверхности мембраны нормально функционирующей невозбужденной живой клетки

C) Разность потенциалов между цитоплазмой и окружающей средой в нормально функционирующей невозбужденной живой клетке

D) Разность потенциалов между окружающей средой и цитоплазмой в нормально функционирующей невозбужденной живой клетке

E) Разность потенциалов между возбужденной и невозбужденной частью биологической мембраны в нормально функционирующей живой клетке

9.9. Выберите верное утверждение о потенциале покоя:

A) Изменяется в зависимости от времени жизни клетки, но всегда положителен

B) Изменяется в зависимости от времени жизни клетки, но всегда отрицателен

C) Не изменяется в процессе жизнедеятельности клетки, всегда равен нулю

D) Не изменяется в процессе жизнедеятельности клетки, всегда положителен

E) Не изменяется в процессе жизнедеятельности клетки, всегда отрицателен

9.10. Уравнение равновесного мембранного потенциала носит имя

A) Ньютона

B) Пуазейля

C) Нернста

D) Фика

9.11. От чего, согласно уравнению Нернста, не зависит величина равновесного мембранного потенциала:

A) Заряда (валентности) иона

B) Молярной концентрации иона снаружи клетки

C) Проницаемости мембраны для иона

D) Молярной концентрации иона внутри клетки

9.12. Уравнение Нернста применимо для определения мембранного потенциала

A) Стационарного

B) Стандартного

C) Равновесного

D) Нулевого

9.13. Мембранный потенциал в состоянии покоя

A) больше нуля

B) меньше нуля

C) равен нулю

D) непрерывно возрастает

9.14. Мембрана клеток в покое

A) Непроницаема для ионов Na^+ и K^+.

B) Проницаема для ионов Na^+ в 25 раз больше, чем для ионов K^+.

C) Проницаема для ионов K^+ в 25 раз больше, чем для ионов Na^+.

D) Одинаково проницаема для ионов Na^+ и K^+.

9.15. Проницаемость биологических мембран для ионов натрия в состоянии покоя …. для ионов калия

A) такая же, как и

B) равна нулю

C) в 25 раз больше, чем

D) в 25 раз меньше, чем

9.16. В состоянии покоя соотношение коэффициентов проницаемости мембраны для ионов калия и натрия

A) 1:0,04

B) 1:20

C) 1:0,45

D) 0,04:1

9.17. Величина потенциала покоя (ПП) одиночного нервного волокна, если снизить на 30% концентрацию ионов K^+ внутри нервной клетки

A) не изменится

B) станет более отрицательным

C) станет менее отрицательным

D) разовьется потенциал действия

9.18. Какой ион играет ключевую роль в формировании и поддержании потенциала покоя нервной клетки?

A) Натрий (Na^+)

B) Калий (K^+)

C) Хлор (Cl^-)

D) Кальций (Ca^{2+})

9.19. Стабильность потенциала покоя обеспечивается

A) калий-натриевым насосом

B) кальциевым насосом

C) диффузией ионов калия

D) диффузией ионов натрия

E) протонной помпой

9.20. Из следующих утверждений о потенциале покоя (ПП) не является верным

A) ПП - это разность потенциалов между цитоплазмой и окружающей средой

B) ПП не изменяется во времени

C) ПП равен 0

D) При ПП суммарный ток ионов через мембрану равен 0

E) При ПП мембрана находится в невозбужденном состоянии

F) ПП существует в любой живой клетке

9.21. Из следующих утверждений о потенциале покоя (ПП) является верным

A) ПП - это потенциал возбужденной клетки

B) ПП меняется во времени

C) ПП равен 0

D) При ПП суммарный ток ионов через мембрану равен 0

9.22. Основной вклад в формирование потенциала покоя вносит разность концентраций по разные стороны мембраны

A) Ионов кальция

B) Ионов натрия

C) Ионов хлора

D) Ионов калия

9.23. Модель Гольдмана-Ходжкина-Катца – это уравнение для … мембранного потенциала

A) Стационарного

B) Стандартного

C) Равновесного

D) Нулевого

9.24. Процесс временной деполяризации мембраны называется

A) возбуждением

B) проведением

C) сокращением

D) торможением

9.25. При действии стимула на возбудимую клетку возникает

A) потенциал покоя

B) потенциал действия

C) инверсный потенциал

D) мембранный потенциал

9.26. Что такое потенциал действия?

A) Постоянный электрический потенциал клетки

B) Кратковременное изменение мембранного потенциала

C) Электронейромиограмма

D) Разность концентраций ионов калия внутри и снаружи клетки

9.27. Какое из следующих утверждений для потенциала действия (ПД) ошибочно?

A) При развитии ПД внутренняя поверхность мембраны клетки заряжается положительно

B) При достижении стимулом порогового значения, величина ПД зависит от силы раздражителя

C) Некоторое время после начала генерации ПД мембрана неспособна к новому возбуждению

D) ПД является коротким импульсом (длительность до 1 мс).

9.28. Потоки ионов Na^+ в фазе деполяризации при возбуждении аксона направлены

A) из клетки наружу активно

B) внутрь клетки пассивно

C) из клетки наружу пассивно

D) внутрь клетки активно

9.29. Мембрана клеток при возбуждении

A) Непроницаема для ионов Na^+ и K^+.

B) Проницаема для ионов Na^+ в 20 раз больше, чем для ионов K^+.

C) Проницаема для ионов K^+ в 20 раз больше, чем для ионов Na^+.

D) Одинаково проницаема для ионов Na^+ и K^+.

9.30. Фаза потенциала действия, заключающаяся в «потере» полярности, уменьшении отрицательной разности потенциалов между наружной и внутренней сторонами мембраны, называется

A) Деполяризация

B) Гиперполяризация

C) Овершут

D) Реполяризация

9.31. Фаза потенциала действия, в которую происходит восстановление значения мембранного потенциала до значения потенциала покоя

A) Деполяризация

B) Инверсия потенциала

C) Овершут

D) Реполяризация

E) Гиперполяризация

F) Следовые потенциалы

9.32. В фазе деполяризации при возбуждении аксона потоки ионов направлены

A) натрий внутрь клетки

B) калий внутрь клетки

C) натрий из клетки

D) хлор из клетки

E) протонной помпой

9.33. Возникновение потенциала действия связано с изменением проницаемости мембраны для ионов

A) калия

B) натрия

C) хлора

D) кальция

9.34. Амплитуда потенциала действия одиночного нервного волокна, если снизить наружную концентрацию ионов натрия

A) не изменится

B) увеличится

C) уменьшится

D) станет равной потенциалу покоя

9.35. Может ли сгенерировать потенциал действия клетка, находящаяся во внешней среде с нулевой концентрацией натрия?

A) может

B) иногда может

C) не может

9.36. Амплитуда потенциала действия по мере его распространения по нервному волокну

A) увеличивается

B) уменьшается

C) совпадает с потенциалом покоя

D) не изменяется

9.37. Na^+-K^+ насос переносит

A) 3K+ наружу, 2Na+ внутрь клетки

B) 3Na+ внутрь клетки, 2K+ наружу

C) 3Na+ наружу, 2K+ внутрь клетки

D) 3K+ внутрь клетки, 2Na+ наружу

9.38. Скорость проведения возбуждения в миелинизированных (υ_1) и безмиелиновых (υ_2) нервных волокнах одинакового диаметра

A) υ_1 больше υ_2

B) υ_1 меньше υ_2

C) υ_1 равна υ_2

D) υ_1 намного меньше υ_2

9.39. Миелиновая оболочка нервного волокна имеет … электрическое сопротивление

A) нулевое

B) низкое

C) переменное

D) высокое

9.40. Миелиновая оболочка нервного волокна по своим электрическим свойствам относится к

A) проводникам

B) электролитам

C) сверхпроводникам

D) диэлектрикам

9.41. Какая задача электрографии состоит в расчете распределения электрического потенциала на поверхности тела по заданным характеристикам электрической активности изучаемого органа?

A) основная

B) прямая

C) обратная

D) вспомогательная

9.42. Какая задача электрографии состоит в определении характеристик электрической активности изучаемого органа по измеренным потенциалам на поверхности тела?

A) основная

B) прямая

C) обратная

D) вспомогательная

9.43. Какого вида электрографии не существует?

A) Электронейрография

B) Электровертебрография

C) Электрогастрография

D) Электромиография

E) Электроэнцефалография

F) Электроретинография

9.44. Запись электрокардиограммы представляет собой зависимость некоторой физической величины, откладываемой по вертикальной оси (оси ординат), от величины независимой переменной, откладываемой по горизонтальной оси (оси абсцисс). Что за физическая величина откладывается по оси ординат?

A) разность потенциалов электрического поля

B) потенциал электрического поля

C) напряжённость электрического поля

D) частота сердечных сокращений

E) время

9.45. Запись электрокардиограммы представляет собой зависимость некоторой физической величины, откладываемой по вертикальной оси (оси ординат), от величины независимой переменной, откладываемой по горизонтальной оси (оси абсцисс). Что за физическая величина откладывается по оси абсцисс?

A) разность потенциалов электрического поля

B) потенциал электрического поля

C) напряжённость электрического поля

D) частота сердечных сокращений

E) время

9.46. Электрокардиограмма представляет собой зависимость некоторой физической величины, откладываемой по вертикальной оси (оси ординат), от величины независимой переменной, откладываемой по горизонтальной оси (оси абсцисс). В каких единицах измеряется физическая величина, откладываемая по оси ординат?

A) В

B) Вт

C) В/м

D) уд/мин

E) с

F) А

G) Ом

9.47. Запись электрокардиограммы представляет собой зависимость некоторой физической величины, откладываемой по вертикальной оси (оси ординат), от величины независимой переменной, откладываемой по горизонтальной оси (оси абсцисс). В каких единицах измеряется физическая величина, откладываемая по оси абсцисс?

A) В

B) Вт

C) В/м

D) уд/мин

E) с

F) А

G) Ом

9.48. Живые ткани человеческого организма по своим электрическим свойствам являются

A) Композитами

B) Диэлектриками

C) Проводниками

D) Электронейтральными

9.49. Какое из следующих утверждений характеризует биологические ткани–проводники?

A) Содержат связанные заряды (диполи)

B) Определяют поляризацию биологических тканей

C) Содержат свободные заряды (ионы)

D) Под действием внешнего электромагнитного поля в них возникают токи смещения

9.50. Как связаны электропроводность и электрическое сопротивление? электропроводность … сопротивлению

A) прямопропорциональна

B) обратнопропорциональна

C) равна

D) способствует

9.51. Выберите единицу измерения электропроводности

A) мВ

B) Ом

C) См

D) см

E) с

F) А

G) Вт

9.52. В каком из этих биоматериалов преобладают токи смещения?

A) Кровь

B) Жир

C) Лимфа

D) Спинномозговая жидкость

9.53. В каком из этих биоматериалов преобладают токи проводимости?

A) Кость

B) Жир

C) Сухая кожа

D) Спинномозговая жидкость

9.54. Наибольшим электрическим сопротивлением из названных обладает

A) Кровь

B) Жир

C) Лимфа

D) Спинномозговая жидкость

9.55. Наименьшим электрическим сопротивлением из названных обладает

A) Кость

B) Жир

C) Сухая кожа

D) Спинномозговая жидкость

9.56. Какая ткань обладает наибольшей электропроводностью?

A) Костная

B) Жировая

C) Кровь

D) Нервная

9.57. Электропроводность в биологических тканях определяется наличием свободных

A) ионов

B) электронов

C) радикалов

D) протонов

9.58. Из-за какого явления уменьшается со временем сила тока, проходящего через биологическую ткань?

A) Поляризация

B) Деполяризация

C) Дисперсия

D) Сопротивление

E) Импеданс

9.59. Смещение диполей под действием электрического поля и образование вследствие этого ЭДС, направленной против внешнего поля, называется

A) дисперсия

B) поляризация

C) импеданс

D) деполяризация

9.60. Полное сопротивление живых объектов переменному току называется

A) дисперсия

B) поляризация

C) импеданс

D) емкостное сопротивление

E) активное сопротивление

F) индуктивное сопротивление

9.61. Уменьшение импеданса при увеличении частоты переменного тока называется … импеданса

A) депрессией

B) поляризацией

C) деполяризацией

D) дисперсией

9.62. Поляризация оказывает наибольшее влияние на импеданс биологической ткани при … частотах

A) высоких

B) средних

C) всех

D) низких

9.63. Коэффициент поляризации живой ткани

A) больше 1

B) равен 1

C) меньше 1

D) больше 0

E) равен 0

F) меньше 0

9.64. Коэффициент поляризации мертвой ткани

$$K = \frac{Z_{НЧ}}{Z_{ВЧ}}$$

A) больше 1

B) равен 1

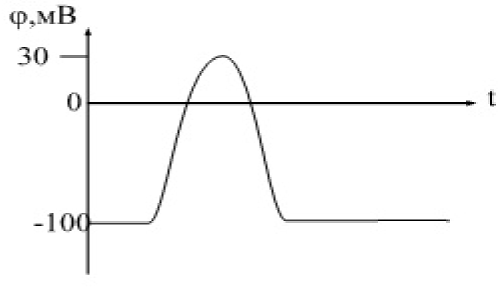
C) меньше 1

D) больше 0

E) равен 0

F) меньше

9.65. На графике представлена зависимость мембранного потенциала клетки от времени. Проанализируйте график и установите соответствие между типом потенциала и его значением.



Тип потенциала	Значение, мВ

1) Покоя 2) Действия	а) +30 б) -100 в) -130 г) +130 д) +70

9.66. Уравнение Нернста имеет вид: $\varphi = -\frac{RT}{ZF} ln \frac{K_i}{K_o}$. Установите соответствие между символами в формуле и их значением.

Символы	Значение
1) φ 2) R 3) T 4) Z 5) F 6) K_i 7) K_o	а) валентность иона б) концентрация ионов калия в клетке в) концентрация ионов калия снаружи клетки г) постоянная Фарадея д) универсальная газовая постоянная е) потенциал покоя ж) термодинамическая температура з) подвижность ионов

9.67. Установите соответствие между биологическими тканями и их способностью проводить электрический ток.

1) Ткани проводники 2) Ткани диэлектрики	а) кожа б) спиномозговая жидкость с) кость д) кровь е) жировая ткань

9.68. Коэффициент поляризации равен 4. Найдите импеданс ткани при частоте 1 МГц, если при 10 кГц он равен 10 кОм.

9.69. Импеданс при частоте тока 1 МГц и 10 кГц оказался, соответственно, равным 1 кОм и 5 кОм. Рассчитайте коэффициент поляризации для этой ткани.

9.70. Рассчитайте электрическое сопротивление нервного волокна длиной 5 см с площадью поперечного сечения в 5 мм^2, считая его удельное сопротивление равным 14,3 Ом·м.

9.71. Во сколько раз сопротивление крови в сосуде больше, чем сопротивление медного проводника тех же длины и сечения? Принять удельное сопротивление крови равным 1,7 · Ом·м, а меди – 0,017 Ом·м.

9.72. Электрическое сопротивление нервного волокна равно R. Как нужно изменить площадь S поперечного сечения этого волокна, чтобы сопротивление уменьшилось в 3 раза?

$$G = \frac{1}{R}$$

9.73. Определите электропроводность сухой кожи, если ее электрическое сопротивление равно 3,3 кОм.

9.74. Определите электропроводность нервного волокна длиной 5 см с площадью поперечного сечения в 5 мм^2, считая его удельное сопротивление равным 14,3 Ом·м.

$$\varphi_{\text{м}} = \varphi_i - \varphi_o = -\frac{RT}{ZF} \cdot \ln\left(\frac{C_i}{C_o}\right),$$

9.75. Исследовали электрические потенциалы бислойной липидной мембраны. Температура среды, в которой находилась мембрана, составила 20 °C. Концентрация ионов калия с одной стороны мембраны равна 10^{-3} моль/л, а с другой – 10^{-4} моль/л. Определите равновесный мембранный потенциал, создаваемый на бислойной липидной мембране ионами калия в данных условиях. Универсальную газовую постоянную считать равной 8,31 Дж/моль·К, постоянная Фарадея равна 96500 Кл/моль.

9.76. Определите равновесный потенциал на мембране при отношении концентраций натрия снаружи и внутри клетки: 2:1. Принять универсальную газовую постоянную равной 8,31 Дж/(моль·К), постоянную Фарадея равной 96500 Кл/моль. Температуру принять равной 27°С.

9.77. Найти натуральный логарифм отношения концентраций ионов калия внутри и снаружи клетки, если равновесный нернстовский потенциал для калия при температуре 27°С равен -75 мВ.

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

9.78. Рассчитайте электрическую емкость биологической мембраны площадью 1 см^2, считая ее толщину равной 5 нм, а диэлектрическую проницаемость приняв за 5.

9.79. Определите диэлектрическую проницаемость фосфолипидного бислоя, если при толщине в 8 нм и площади в 2000 мкм^2 она имеет электроемкость 8,85пФ.

9.80. Электрическая емкость мембраны аксона кальмара оказалась равной 0,25 мкФ. Найти толщину гидрофобного слоя мембраны с диэлектрической проницаемостью 3, если ее площадь составляет 0,5 см^2.

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \upsilon C}$$

9.81. Найти емкостное сопротивление биологической мембраны с электрической емкостью 1 пФ при пропускании переменного тока с частотой 50 Гц.

9.82. Омическое сопротивление ткани равно 5кОм. Её электрическая емкость равна 2 пФ. Чему равна циклическая частота переменного тока, при которой емкостное сопротивление сравняется с омическим?

9.83. Найти электрическую емкость биологической мембраны, если известно, что при прохождении через нее переменного тока с частотой в 100 Гц ее емкостное сопротивление составило 100 кОм.

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 c^2}}$$

9.84. Чему равен импеданс ткани, если известно, что активное сопротивление ткани равно 10 кОм, а емкостное превышает активное в 3 раза?

9.85. Определите активное сопротивление ткани, если емкостное равно 10 кОм, а импеданс составляет 23 кОм.

9.86. Чему равна диэлектрическая проницаемость биоткани, если напряженность электрического поля внутри ткани равна 10 В/м, а напряженность этого электрического поля в вакууме составляет 30 В/м?

9.87. Найдите напряженность электрического поля в биологической среде с диэлектрической проницаемостью 6, если известно, что напряженность этого поля в вакууме составляет 36 В/м.

ОТВЕТЫ

1. Основы теории вероятностей

1.1. A	1.18. A	1.35. A
1.2. B	1.19. C	1.36. C
1.3. B	1.20. D	1.37. C
1.4. D	1.21. A	1.38. D
1.5. C	1.22. C	1.39. D
1.6. B	1.23. D	1.40. D
1.7. C	1.24. B	1.41. C
1.8. A	1.25. A	1.42. D
1.9. C	1.26. C	1.43. B
1.10. D	1.27. B	1.44. B
1.11. D	1.28. B	1.45. A
1.12. C	1.29. C	1.46. B
1.13. B	1.30. D	1.47. B
1.14. A	1.31. B	1.48. B
1.15. A	1.32. D	1.49. C
1.16. B	1.33. B	1.50. E
1.17. A	1.34. A	1.51. E

1.52. 1) Г, 2) В, 3) А, 4) Б; 1.53. 1) В, 2) А, 3) Б, 4) Д; 1.54. 1) Д, 2) Г, 3) Б, 4) А; 1.55. 1) А, 2) Б, 3) Б, 4) А; 1.56. 1) Б; 2) А; 3) А; 4) Б.

1.57. 0,125; 1.58. $^1/_3$; 1.59. 0,00097; 1.60. 0,25; 0,5; 0,24; 1.61. 0,71; 1.62. 0,65; 1.63. $^8/_{15}$; 1.64. 0,955; 1.65. 0,93; 1.66. 0,045; 1.67. 0,715; 1.68. 0,665; 1.69. 6; 1.70. $^5/_{12}$; 1.71. 0,002

2. Случайные величины и их законы распределения

2.1. A	2.9. C	2.17. C	2.25. A
2.2. C	2.10. B	2.18. D	2.26. A
2.3. B	2.11. A	2.19. B	2.27. A
2.4. C	2.12. C	2.20. B	2.28. C
2.5. C	2.13. A	2.21. D	2.29. D
2.6. A	2.14. D	2.22. C	2.30. D
2.7. D	2.15. B	2.23. A	2.31. D
2.8. C	2.16. D	2.24. B	

2.32. 1-В, 2-Г, 3-Б

2.33. 1-В,Д; 2-В,Е; 3-В,Г; 4-А,Г.

2.34. 9; 1,5; 1,22	2.43. 5; 1,2; 1,10
2.35. 3,45; 0,95; 0,97	2.44. 5; 4,2; 2,05
2.36. 32; 6; 2,45	2.45. 4; 1,5; 1,22
2.37. 23; 1,5; 1,22	2.46. 4; 6; 2,45
2.38. 28; 136; 11,66	2.47. 24; 164; 12,81
2.39. 16; 13,5; 3,67	2.48. 9; 6; 2,45
2.40. 22; 136; 11,66	2.49. 17; 61; 7,81
2.41. 4; 1,2; 1,10	2.50. 8; 136; 11,66
2.42. 40; 150; 12,25	

3. Основы математической статистики

3.1. B	3.14. B
3.2. A	3.15. D
3.3. C	3.16. A
3.4. B	3.17. B
3.5. C	3.18. B
3.6. B	3.19. C
3.7. D	3.20. B
3.8. A	3.21. C
3.9. C	3.22. B
3.10. B	3.23. C
3.11. A	3.24. D
3.12. A	3.25. A
3.13. B	3.26. B

3.27. 1-Г, 2-Б, 3-В, 4-А

3.28.

$n=22$ $\bar{x}_в=30$ $S_в^2=11{,}7$ $S_в=3{,}4$

3.29.

$n=21$ $\bar{x}_в=174$ $S_в^2=62{,}7$ $S_в=7{,}9$

3.30.

$n=22$ $\bar{x}_в=84{,}3$ $S_в^2=300{,}7$ $S_в=17{,}3$

3.31.

$n=21$ $\bar{x}_в=126{,}2$ $S_в^2=395$ $S_в=19{,}9$

3.32.

$n=22$ $\bar{x}_в=67{,}7$ $S_в^2=167{,}6$ $S_в=12{,}9$

3.33.

$n=22$ $\bar{x}_{\text{в}}=115{,}5$ $S_{\text{в}}^2=552{,}1$ $S_{\text{в}}=23{,}5$

3.34.

$n=24$ $\bar{x}_{\text{в}}=101{,}3$ $S_{\text{в}}^2=181{,}8$ $S_{\text{в}}=13{,}5$

3.35.

$n=21$ $\bar{x}_{\text{в}}=6{,}1$ $S_{\text{в}}^2=9{,}9$ $S_{\text{в}}=3{,}2$

3.36.

$n=26$ $\bar{x}_{\text{в}}=2{,}5$ $S_{\text{в}}^2=1{,}3$ $S_{\text{в}}=1{,}1$

3.37.

$n=22$ $\bar{x}_{\text{в}}=5{,}3$ $S_{\text{в}}^2=2{,}7$ $S_{\text{в}}=1{,}6$

3.38.

$n=23$ $\bar{x}_{\text{в}}=13{,}3$ $S_{\text{в}}^2=9$ $S_{\text{в}}=3$

3.39.

$n=23$ $\bar{x}_{\text{в}}=147{,}2$ $S_{\text{в}}^2=90{,}9$ $S_{\text{в}}=9{,}5$

3.40.

$n=23$ $\bar{x}_{\text{в}}=129{,}9$ $S_{\text{в}}^2=60$ $S_{\text{в}}=7{,}7$

3.41.

$n=22$ $\bar{x}_{\text{в}}=101{,}9$ $S_{\text{в}}^2=68{,}7$ $S_{\text{в}}=8{,}3$

3.42.

$n=22$ $\bar{x}_{\text{в}}=97{,}8$ $S_{\text{в}}^2=36$ $S_{\text{в}}=6$

3.43.

$n=22$ $\bar{x}_{\text{в}}=54{,}9$ $S_{\text{в}}^2=131{,}5$ $S_{\text{в}}=11{,}5$

3.44.

$n=21$ $\bar{x}_{\text{в}}=4{,}5$ $S_{\text{в}}^2=0{,}2$ $S_{\text{в}}=0{,}4$

3.45.

$n=21$ $\bar{x}_{\text{в}}=8{,}3$ $S_{\text{в}}^2=1$ $S_{\text{в}}=1$

3.46.

$n=20$ $\bar{x}_{\text{в}}=92$ $S_{\text{в}}^2=2{,}8$ $S_{\text{в}}=1{,}7$

3.47.

$n=20$ $\bar{x}_в=81,9$ $S_в^2=24,3$ $S_в=4,9$

3.48.

$n=21$ $\bar{x}_в=4,3$ $S_в^2=0,5$ $S_в=0,7$

3.49.

$n=21$ $\bar{x}_в=6$ $S_в^2=0,1$ $S_в=0,2$

3.50.

$n=24$ $\bar{x}_в=10,8$ $S_в^2=9,3$ $S_в=3$

3.51.

$n=24$ $\bar{x}_в=52,5$ $S_в^2=332,2$ $S_в=18,2$

3.52.

$n=22$ $\bar{x}_в=22,6$ $S_в^2=118,3$ $S_в=10,9$

3.53.

$n=22$ $\bar{x}_в=567,9$ $S_в^2=2380$ $S_в=48,8$

3.54.

$n=20$ $\bar{x}_в=278,1$ $S_в^2=10427$ $S_в=102,1$

3.55.

$n=20$ $\bar{x}_в=967,8$ $S_в^2=7956$ $S_в=89,2$

3.56.

$n=21$ $\bar{x}_в=25$ $S_в^2=16$ $S_в=4$

3.57.

$n=20$ $\bar{x}_в=960$ $S_в^2=12380$ $S_в=111,3$

3.58.

$n=21$ $\bar{x}_в=85,7$ $S_в^2=427$ $S_в=20,7$

3.59.

$n=21$ $\bar{x}_в=72$ $S_в^2=230,1$ $S_в=15,2$

3.60. $94 \le M(x) \le 110$ мм рт.ст.; 3.61. $81 \le M(x) \le 94$ мм рт.ст.; 3.62. $9,7 \le M(x) \le 10,3$ мг %; 3.63. $6,3 \le M(x) \le 7,4$ мг %; 3.64. $115 \le M(x) \le 133$ мм рт.ст.; 3.65. $168 \le M(x) \le 172$ см; 3.66. $66 \le M(x) \le 74$ уд/мин; 3.67. $171 \le M(x) \le 173$ см; 3.68. $97 \le M(x) \le 103$ мм рт.ст.; 3.69. $78 \le M(x) \le 92$ мм рт.ст.;

3.70. $69 \le M(x) \le 79$ мм рт.ст.; 3.71. $60 \le M(x) \le 66$ мм рт.ст.; 3.72. $117 \le M(x) \le 127$ мм рт.ст. 3.73. $68 \le M(x) \le 74$ уд/мин; 3.74. $168 \le M(x) \le 176$ см; 3.75. $169 \le M(x) \le 177$ см; 3.76. $64 \le M(x) \le 74$ г

4. Проверка статистических гипотез

4.1. C	4.23. D	4.45. B
4.2. B	4.24. B	4.46. D
4.3. B	4.25. B	4.47. B
4.4. A	4.26. C	4.48. C
4.5. A	4.27. C	4.49. C
4.6. C	4.28. C	4.50. D
4.7. C	4.29. C	4.51. D
4.8. C	4.30. C	4.52. B
4.9. A	4.31. B	4.53. B
4.10. A	4.32. A	4.54. B
4.11. B	4.33. C	4.55. D
4.12. B	4.34. A	4.56. D
4.13. C	4.35. A	4.57. C
4.14. D	4.36. B	4.58. C
4.15. D	4.37. B	4.59. A
4.16. D	4.38. A	4.60. A
4.17. D	4.39. A	4.61. B
4.18. A	4.40. A	4.62. B
4.19. A	4.41. D	4.63. C
4.20. C	4.42. A	4.64. D
4.21. C	4.43. A	4.65. C
4.22. D	4.44. D	4.66. C

4.67. $t_{кр}(0{,}05;\ 19) = 2{,}09$, $|t_{эксп}| > t_{кр}$, различие значимо

4.68. $F_{кр}(0{,}05;\ 24;\ 22) = 2{,}03$, $F_{набл} = 4{,}33$, $F_{набл} > F_{кр}$, различие значимо

4.69. $t_{кр}(0{,}05; 23) = 2{,}07$, $|t_{эксп}| > t_{кр}$, различие значимо

4.70. $t_{кр}(0{,}05; 23) = 2{,}07$, $t_{эксп} > t_{кр}$, различие значимо

4.71. $t_{кр}(0{,}05; 47) = 2{,}02$, $t_{эксп} > t_{кр}$, различие значимо

4.72. $t_{кр}(0{,}05; 20) = 2{,}09$, $t_{эксп} > t_{кр}$, различие значимо

4.73. $t_{кр}(0{,}05; 39) = 2{,}04$, $t_{эксп} < t_{кр}$, различие незначимо

4.74. $F_{кр}(0{,}05; 12; 9) = 3{,}07$, $F_{набл} = 1{,}9$, $F_{набл} < F_{кр}$, различие незначимо

4.75. $F_{кр}(0{,}05; 11; 9) = 3{,}23$, $F_{набл} = 1{,}07$, $F_{набл} < F_{кр}$, различие незначимо

4.76. $F_{кр}(0{,}05; 11; 12) = 2{,}85$, $F_{набл} = 1{,}57$, $F_{набл} < F_{кр}$, различие незначимо

4.77. $F_{кр}(0{,}05; 12; 14) = 2{,}53$, $F_{набл} = 1{,}58$, $F_{набл} < F_{кр}$, различие незначимо

4.78. $F_{кр}(0{,}05; 24; 24) = 1{,}98$, $F_{набл} = 1{,}40$, $F_{набл} < F_{кр}$, различие незначимо

4.79. $F_{кр}(0{,}05; 12; 12) = 2{,}69$, $F_{набл} = 1{,}16$, $F_{набл} < F_{кр}$, различие незначимо

4.80. $t_{кр}(0{,}05; 73) = 2{,}00$, $|t_{эксп}| < t_{кр}$, различие случайно

4.81. $F_{кр}(0{,}05; 18; 17) = 2{,}38$, $F_{набл} = 1{,}38$, $F_{набл} < F_{кр}$, различие дисперсий незначимо, можно использовать критерий Стьюдента.

4.82. $t_{кр}(0{,}05; 48) = 2{,}02$, $t_{набл} > t_{кр}$, можно, т.к. различие генеральных средних значимо.

4.83. $F_{кр}(0{,}05; 29; 26) = 1{,}96$, $F_{набл} = 1{,}37$, $F_{набл} < F_{кр}$, различие незначимо

4.84. $F_{кр}(0{,}05; 12; 15) = 2{,}48$, $F_{набл} = 3$, $F_{набл} > F_{кр}$, различие значимо

4.85. $\chi^2_{кр}(0{,}05; 4) = 9{,}49$, $\chi^2_{расч} < \chi^2_{кр}$, распределение следует НЗР

4.86. $\chi^2_{кр}(0{,}05; 6) = 12{,}59$, $\chi^2_{расч} > \chi^2_{кр}$, распределение не следует НЗР

5. Корреляционный и регрессионный анализы

5.1. A	5.6. D	5.11. C	5.16. B
5.2. B	5.7. B	5.12. D	5.17. C
5.3. D	5.8. D	5.13. D	5.18. B
5.4. A	5.9. C	5.14. C	5.19. C
5.5. A	5.10. D	5.15. C	

5.20. $t_{набл}$=6,36 $t_{крит}$(0,05;11) = 2,2 - существует обратная тесная линейная корреляционная связь; 5.21. $t_{набл}$=9.4 $t_{крит}$(0,05;10) = 2,23 - существует обратная очень сильная линейная корреляционная связь; 5.22. $t_{набл}$=2,35 $t_{крит}$(0,05;9) = 2,62 - линейная корреляционная связь незначима; 5.23. $t_{набл}$=0.17 $t_{крит}$(0,05;12) = 2,18 - линейная корреляционная связь не установлена; 5.24. $t_{набл}$=9,3 $t_{крит}$(0,05;12) = 2,18 - существует прямая очень сильная линейная корреляционная связь; 5.25. $t_{набл}$=6,36 $t_{крит}$(0,05;10) = 2,23 - существует прямая тесная линейная корреляционная связь; 5.26. $t_{набл}$=0,27 $t_{крит}$(0,05;11) = 2,2 - линейная корреляционная связь незначима; 5.27. $t_{набл}$=8,55 $t_{крит}$(0,05;9) = 2,62 - существует прямая очень сильная линейная корреляционная связь; 5.28. $t_{набл}$=0,04 $t_{крит}$(0,05;13) = 2,16 - линейная корреляционная связь не обнаружена; 5.29. $t_{набл}$=1,69 $t_{крит}$(0,05;12) = 2,18 - линейная корреляционная связь незначима; 5.30. $t_{набл}$=4,15 $t_{крит}$(0,05;10) = 2,23 - существует обратная тесная линейная корреляционная связь; 5.31. $t_{набл}$=0,44 $t_{крит}$(0,05;9) = 2,62 - линейная корреляционная связь незначима; 5.32. $t_{набл}$=10,6 $t_{крит}$(0,05;11) = 2,2 - существует прямая очень сильная линейная корреляционная связь

6. Механические колебания и волны

6.1. A, D
6.2. D
6.3. A
6.4. A, D
6.5. A
6.6. C
6.7. C
6.8. D
6.9. C
6.10. C
6.11. A
6.12. A, D
6.13. B
6.14. D
6.15. B, C
6.16. C
6.17. C
6.18. B
6.19. C
6.20. B
6.21. A
6.22. C
6.23. D
6.24. A
6.25. A, D
6.26. B
6.27. B
6.28. A, C
6.29. C
6.30. B
6.31. B, D
6.32. D
6.33. D
6.34. A
6.35. A, C
6.36. D
6.37. D
6.38. B
6.39. B, D
6.40. C
6.41. B, D
6.42. A, D
6.43. B, D
6.44. B, D
6.45. B, D
6.46. A
6.47. C
6.48. C
6.49. D
6.50. C
6.51. C
6.52. B

6.53. А-1,4; Б-3; В-1; 6.54. А-3, Б-5, В-6, Г-2, Д-4, Е-1; 6.55. А-3, Б-1, В-2; 6.56. 10 мм; 6.57. 2,1 м; 6.58. 2,25 м; 6.59. 1 Вт/м^2; 6.60. $1{,}5\cdot10^6$ кг/(м$^2\cdot$с); 6.61. 40 дБ; 6.62. 17 м; 6.63. 70 фон; 6.64. 0,5 с; 6.65. 20 фон; 6.66. 0,7; 6.67. 50 дБ; 6.68. 0,5 м/с; 6.69. $3\cdot10^{-4}$ Вт/м^2; 6.70. 13 кГц; 6.71. 3; 6.72. 7,5 см; 6.73. 0,8; 6.74. 2; 6.75. 2; 6.76. 2,3 кГц

7. Элементы биореологии

7.1. B
7.2. D
7.3. C
7.4. C
7.5. B
7.6. A
7.7. D
7.8. C
7.9. C
7.10. C
7.11. B
7.12. B
7.13. A
7.14. A
7.15. B
7.16. B
7.17. D
7.18. A
7.19. C
7.20. C
7.21. B
7.22. C
7.23. B
7.24. C
7.25. D
7.26. C
7.27. D
7.28. D
7.29. C
7.30. C
7.31. B
7.32. B
7.33. A
7.34. B
7.35. D
7.36. C
7.37. A
7.38. D
7.39. C
7.40. B
7.41. B
7.42. C
7.43. C
7.44. C
7.45. A
7.46. B
7.47. C
7.48. C
7.49. B
7.50. C
7.51. C
7.52. C
7.53. A
7.54. D
7.55. A
7.56. B
7.57. B
7.58. A
7.59. A
7.60. B

7.61. 1-е, 2-д, 3-в, 4-г; 7.62. 1-в, 2-г, 3-а; 7.63. 1-д, 2-б, 3-в, 4-е; 7.64. 1-е, 2-г, 3-в, 4-ж, 5-д; 7.65. 1-б, 2-а, 3-г; 7.66. 1-е, 2-б, 3-д, 4-г; 7.67. 1-в, 2-б, 3-а; 7.68. 1-г, 2-б; 7.69. 0.7 $с^{-1}$; 7.70. 0.5 мН; 7.71. 3 мН; 7.72. 26 Па; 7.73. 900 мПа·с; 7.74. 4.2 мкм; 7.75. 2625 турбулентный режим; 7.76. 0.1 м/с; 7.77. $v_в/v_{кр} = 0.6$; 7.78. 2.6 мл; 7.79. увеличится в 13.5 раз; 7.80. 4.6 $м^3$; 7.81. $2\cdot10^{-}$

^{4} м^3/с; 7.82. 21.6 Н·с/м^5; 7.83. 10^9 Н·с/м^5; 7.84. 400 Н·с/м^5; 7.85. 90 Н·с/м^5; 7.86. $v_{кап} = v_{аор}/500$; 7.87. 2 м; 7.88. 5

8. Биомембранология

8.1. C
8.2. D
8.3. A
8.4. C
8.5. A
8.6. D
8.7. A
8.8. C
8.9. B
8.10. C
8.11. C
8.12. C
8.13. A
8.14. C
8.15. D
8.16. A
8.17. C
8.18. A
8.19. B
8.20. D
8.21. C
8.22. A
8.23. B
8.24. C
8.25. B
8.26. A
8.27. A
8.28. B
8.29. C
8.30. D
8.31. C
8.32. D
8.33. A
8.34. A
8.35. B
8.36. D
8.37. B
8.38. A
8.39. A
8.40. B
8.41. D

8.42. 1 Б, В, Д; 2 А, Г, Е
8.43. 1 В, 2 А, 3 Г
8.44. 1 Б, В, Д; 2 А, Г, Е
8.45. $5 \cdot 10^8 \frac{моль}{м^4}$
8.46. $1{,}43 \cdot 10^6$
8.47. $2{,}8 \cdot 10^3 \frac{моль}{м^2 \cdot с}$
8.48. 15
8.49. $1{,}45 \cdot 10^{10} \frac{моль}{м^4}$
8.50. 36 моль/м^3
8.51 11 нм
8.52. 10^{-3} м/с
8.53. $0{,}012 \frac{моль}{м^2 \cdot с}$
8.54. $7{,}5 \cdot 10^6$ В/м
8.55. $16 \cdot 10^{-4}$ м/с
8.56. меньше нормы в 2 раза
8.57. $5 \cdot 10^{-10} \frac{м^2}{с}$.

9. Биоэлектрогенез. Электрические свойства тканей организма

9.1. B	9.23. A	9.45. E
9.2. C	9.24. A	9.46. A
9.3. A	9.25. B	9.47. E
9.4. A	9.26. B	9.48. A
9.5. B	9.27. B	9.49. C
9.6. B	9.28. B	9.50. B
9.7. C	9.29. B	9.51. C
9.8. C	9.30. A	9.52. B
9.9. E	9.31. D	9.53. D
9.10. C	9.32. A	9.54. B
9.11. C	9.33. B	9.55. D
9.12. C	9.34. C	9.56. C
9.13. B	9.35. C	9.57. A
9.14. C	9.36. D	9.58. A
9.15. D	9.37. C	9.59. B
9.16. A	9.38. A	9.60. C
9.17. C	9.39. D	9.61. D
9.18. B	9.40. D	9.62. D
9.19. A	9.41. B	9.63. A
9.20. C	9.42. C	9.64. B
9.21. D	9.43. B	
9.22. D	9.44. A	

9.65. 1б, 2г; 9.66. 1е, 2д, 3ж, 4а, 5г, 6б, 7в; 9.67. 1б, д; 2 а,с,е; 9.68. 2,5 кОм; 9.69. 5; 9.70. $1{,}43\cdot10^{5}$ Ом; 9.71. В 100 раз; 9.72. Увеличить в 3 раза; 9.73. $3\cdot10^{-4}$ См; 9.74. $7\cdot10^{-6}$ См; 9.75. -58 мВ; 9.76. 0,018 В; 9.77. 2,97; 9.78. 0,885 мкФ; 9.79. 4; 9.80. 5,31 нм; 9.81. $3{,}18\cdot10^9$ Ом; 9.82. 10^8 рад/с; 9.83. 15,92 нФ; 9.84. 31,6 кОм; 9.85. 20,7 кОм; 9.86. 3; 9.87. 6 В/м

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Омельченко В.П. Математика : учебник / В.П. Омельченко. - Москва : ГЭОТАР-Медиа, 2017. - 300 с. - ISBN 978-5-9704-4028-5.
2. Антонов В.Ф. Физика и биофизика : учебник / В.Ф. Антонов, Е.К. Козлова, А.М. Черныш. - Москва : ГЭОТАР-Медиа, 2015. - 472с. - ISBN 978-5-9704-2401-8.
3. Ильич Г.К. Медицинская и биологическая физика: колебания и волны, акустика, гемодинамика : учебное пособие / Г.К. Ильич. - Минск : МГМИ, 2000.- 90 с.
4. Лещенко В.Г. Медицинская и биологическая физика : учебное пособие / В.Г. Лещенко, Г.К. Ильич. - Минск : Новое знание; Москва : ИНФРА-М, 2012. - 552 с. - ISBN 978-985-475-456-7.
5. Нормальная физиология : курс лекций / В.И. Кузнецов, А.П. Божко, А.П. Солодков, И.В. Городецкая. - Витебск : ВГМУ, 2017. - 611 с. - ISBN 978-985-466-877-2.
6. Омельченко В. П. Практические занятия по высшей математике: учебное пособие / В. П. Омельченко, Э. В. Курбатова. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2006. - 350 с. - ISBN 5-222-09785-4.
7. Омельченко В.П. Физика. Математика: учебник для студентов мед. и фармацевт. вузов / В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова. - Санкт-Петербург : СпецЛит, 2019. - 351 с. - ISBN 978-5-299-00872-2.
8. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика : учебник / А.Н. Ремизов. - Москва : ГЭОТАР-Медиа, 2023. - 656 с. - ISBN 978-5-9704-1924-3.

9. Самойлов В.О. Медицинская биофизика : учебник / В.О. Самойлов. - Санкт-Петергург : СпецЛит, 2004. - 496 с. - ISBN 5-299-00277-7.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Критические значения *t*(α, *f*) распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область)

Число	Уровень			Число	Уровень значимости		
свободы *f*	0,10	0,05	0,01	свободы *f*	0,10	0,05	0,01
1	6,31	12,7	63,7	18	1,73	2,10	2,88
2	2,92	4,30	9,92	19	1,73	2,09	2,86
3	2,35	3,18	5,84	20	1,73	2,09	2,85
4	2,13	2,78	4,60	21	1,72	2,08	2,83
5	2,01	2,57	4,03	22	1,72	2,07	2,82
6	1,94	2,45	3,71	23	1,71	2,07	2,81
7	1,89	2,36	3,50	24	1,71	2,07	2,80
8	1,86	2,31	3,36	25	1,71	2,06	2,79
9	1,83	2,26	3,25	26	1,71	2,06	2,78
10	1,81	2,23	3,17	27	1,71	2,05	2,77
11	1,80	2,20	3,11	28	1,70	2,05	2,76
12	1,78	2,18	3,05	29	1,70	2,05	2,76
13	1,77	2,16	3,01	30	1,70	2,04	2,75
14	1,76	2,14	2,98	40	1,68	2,02	2,70
15	1,75	2,13	2,95	60	1,67	2,00	2,66
16	1,75	2,12	2,92	120	1,66	1,98	2,62
17	1,74	2,11	2,90	∞	1,64	1,96	2,58

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические значения χ^2-критерия Пирсона, соответствующие разным уровням значимости (α) и числам степеней свободы (f)

Число степеней свободы (f)	Уровни значимости (α)				
	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	6,25	7,81	9,84	11,34	16,27
4	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	9,21	11,07	13,39	15,09	20,52
6	10,64	12,59	15;03	16,81	22,46
7	12,02	14,07	16,62	18,48	24,32
8	13,36	15,51	18,17	20,09	26,12
9	14,68	16,92	19,68	21,67	27,88
10	15,99	18,31	21,16	23,21	29,59
11	17,28	19,68	22,62	24,72	31,26
12	18,55	21,03	24,05	26,22	32,91
13	19,81	22,36	25,47	27,69	34,53
14	21,06	23,68	26,87	29,14	36,12
15	22,31	25,00	28,26	30,58	37,70
16	23,54	26,30	29,63	32,00	39,25
17	24,77	27,59	31,00	33,41	40,79
18	25,99	28,87	32,35	34,81	42,31
19	27,20	30,14	33,69	36,19	43',82
20	28,41	31,41	35,02	37,57	45,32
α	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001

Учебное пособие

А.А. Демидова, Н.В. Карасенко, Г.В. Антоненко,
К.С. Караханян, С.В. Доронкина, Н.Г. Короткиева,
В.Г. Коршунов, И.О. Михальчич

ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА

Подписано в печать 19.12.2025. Формат 60x90 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 19 п.л.
Тираж 70 экз.

Отпечатано в учебной типографии
ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России
344022, г. Ростов-на-Дону, пер. Нахичеванский, 29

Цена 750 руб.